HIDRÁULICA E HIDROLOGÍA

EJERCICIO INNOVACIÓN EDUCATIVA

Francisco Jose Dominguez Quintans 126

Andrea Garcia Prieto 171

2012/2013

Un embalse tiene la superficie libre a la cota 1000 metros. Del citado embalse parten a la cota 985 dos tuberías de diámetro D y 2D que a los 3 kilómetros se unen en una sola de diámetro 1,5D. En la tubería de diámetro 2D se regula el caudal mediante una válvula de forma que sea el mismo que el que circula por la tubería de diámetro D. En el punto de unión de ambas tuberías, cota 920, existe un grupo de bombeo de 30.000 CV funcionando con un rendimiento del 70%. La tubería de diámetro 1,5D tiene una longitud de 2000 metros y desagua a la cota 1160 en un embalse cuya superficie libre está a la cota 1200 metros. Sabiendo que las tuberías tienen una rugosidad absoluta de 0.05 mm, se pide:

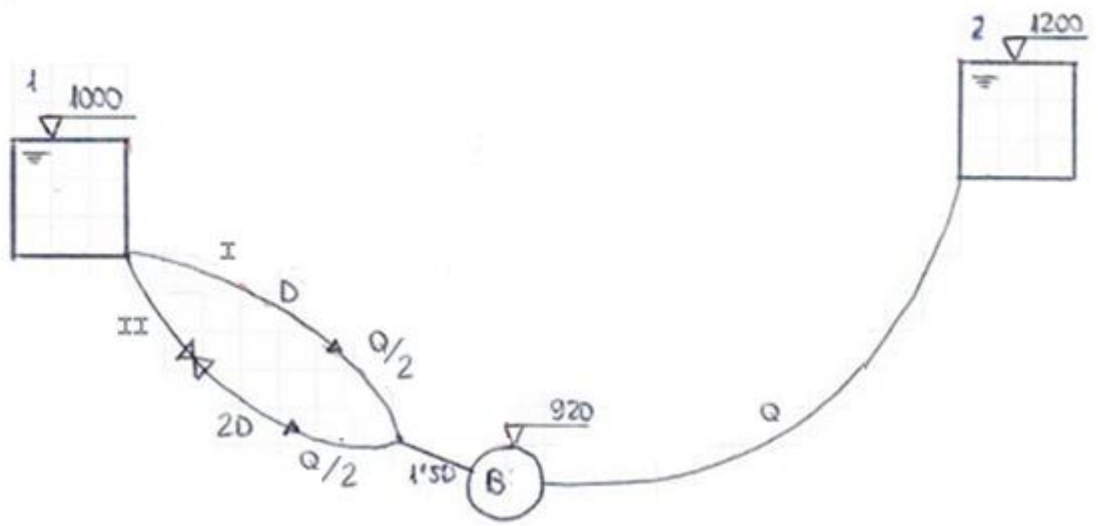
a) Calcular el valor de D para que el caudal que pase del primer embalse al segundo sea de 5 m^3/s

b) Calcular el valor del coeficiente de pérdidas localizadas que se produce en la válvula que regula el caudal de la tubería de diámetro 2D.

c) Croquis acotado de las líneas de energía y piezométrica.

DATOS: Viscosidad dinámica del agua: 0,0008 $[\frac{kg}{m.s}]$. Despreciar las pérdidas localizadas a la salida del depósito y de la bomba.

SOLUCIÓN:



a) Empezamos estableciendo la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2, es decir, entre las superficies libres de los dos depósitos. Para ello, partimos de la formulación más general:

$$H_1 + \Delta H_{Ganancias} = H_2 + \Delta H_{Pérdidas} \quad [1]$$

En nuestro caso, el incremento de energía que proporciona el grupo de bombeo se puede considerar como una "ganancia localizada" de energía. Por otro lado, las pérdidas de energía se pueden clasificar en continuas (debidas al rozamiento con la conducción) y localizadas (causadas por una perturbación puntual).

Establecemos la línea de corriente entre los puntos 1 y 2, esto es, el "camino" que seguiría una partícula de agua para llegar de un punto a otro. En la bifurcación hacemos que la partícula pase por el ramal I. Es el recorrido más simple, además de que desconocemos aún la pérdida que nos produce la válvula.

Por tanto, teniendo en cuenta las ganancias y las pérdidas que ha sufrido en ese recorrido, la ecuación será:

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + \Delta H_{Bomba} = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta H_{continuas} + \Delta H_{localizadas} \qquad [2]$$

Tenemos dos tramos de conducción, de distinto diámetro y longitud, por lo que el término de pérdidas continuas tendrá dos componentes: una para el ramal I y otra para el tramo de impulsión (tubería desde la bomba hasta el depósito final):

$$\Delta H_{continuas} = \Delta H_{cont}^{I} + \Delta H_{cont}^{imp} \qquad [3]$$

En cuanto a las pérdidas localizadas, no se tiene en cuenta otra pérdida más que la entrada al depósito, pues conocemos su coeficiente de pérdida de localizada ($k = 1$). Esto es así porque el agua pierde toda su velocidad al entrar al depósito:

$$\Delta H_{localizadas} = 1\frac{v^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} \qquad (siendo\ v\ la\ velocidad\ a\ la\ entrada) \qquad [4]$$

Además, ya que los puntos 1 y 2 son de la superficie libre no tienen velocidad ($v_1 = 0; v_2 = 0$) y al medir en presiones relativas ($P_{relativa} = P_{absoluta} - P_{atmosférica}$), los términos de presión del trinomio de Bernoulli también son nulos:

$$Z_1 + \cancel{\left(\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g}\right)} + \Delta H_{Bomba} = Z_2 + \cancel{\left(\frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}\right)} + \Delta H_{continuas} + \Delta H_{localizadas} \qquad [5]$$

Sustituyendo:

$$1000 + \Delta H_{Bomba} = 1200 + \Delta H_{cont}^{I} + \Delta H_{cont}^{imp} + \Delta H_{localizadas} \qquad [6]$$

Ahora pasemos a sustituir en esta última ecuación los 3 términos que quedan:

- La altura de bombeo se expresar como:

$$\Delta H_{Bomba} = \frac{\eta * Pot_{Bomba}}{\gamma * Q} = \frac{0{,}7 * 735{,}5[\frac{W}{CV}] * 30000[CV]}{9810[\frac{N}{m^3}] * 5[\frac{m^3}{s}]} = 314{,}89\ [m] \qquad [7]$$

Dicha expresión viene de:

$$Pot_{hidraulica} = \frac{trabajo}{tiempo} = \frac{fuerza * desplazamiento}{tiempo} = \frac{peso\ de\ agua * altura}{tiempo} = \frac{\gamma * Vol * alt}{tiempo} = \gamma Q \Delta H_{Bomba}$$

$$Pot_{Bomba} = \frac{Pot_{hidraulica}}{\eta(rendimiento)} = \frac{\gamma Q \Delta H_{Bomba}}{\eta}$$

- En las pérdidas continuas, las pendientes de pérdidas las calculamos usando la fórmula de Darcy-Weisbach:

$$I = \frac{f}{D}\frac{V^2}{2g} \quad \rightarrow \quad \Delta H_{continua} = IL = \frac{f}{D}\frac{V^2}{2g}L = \frac{f8Q^2}{\pi^2 g D^5}L$$

Los dos términos de la ecuación [3] son pues:

$$\Delta H_{cont}^{I} = \frac{f^{\,I} * 8 * 2{,}5^2}{\pi^2 g D^5} 3000 \qquad [8]$$

$$\Delta H_{cont}^{imp} = \frac{f^{\,imp} * 8 * 5^2}{\pi^2 g (1{,}5D)^5} 2000 \qquad [9]$$

Para obtener las f usaremos la fórmula de Colebrook:

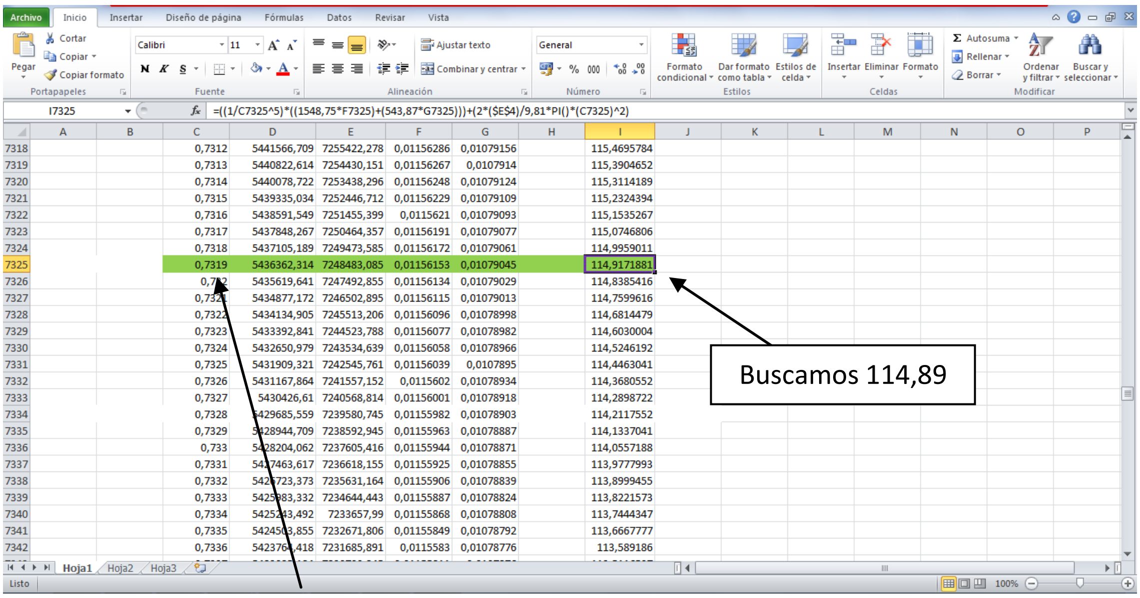
$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\frac{\frac{\varepsilon}{D}}{3{,}715} + \frac{2{,}51}{Re\sqrt{f}}\right) \qquad \text{donde} \qquad Re = \frac{V * D}{\nu} \qquad [10]$$

Al sustituir las ecuaciones [4] [7] [8] [9] en la [6] tenemos una ecuación que sólo depende del diámetro (D):

$$114{,}89 = \frac{f^{\,I} * 8 * 2{,}5^2}{\pi^2 g D^5} 3000 + \frac{f^{\,imp} * 8 * 5^2}{\pi^2 g (1{,}5D)^5} 2000 + \frac{8 * 5^2}{\pi^2 g (1{,}5D)^4} \qquad [11]$$

El problema viene en que la ecuación de Colebrook es una ecuación implícita en f, por lo que no podemos despejar $f^{\,I}$ ni $f^{\,imp}$ y tendremos que iterar con valores de D.

En esta hoja de cálculo se observan distintos valores de D. Dando valores a D en el término de la derecha de la ecuación [11] buscamos que nos resulte igual al término de la izquierda:



I7325 =((1/C7325^5)*((1548,75*F7325)+(543,87*G7325)))+(2*(E4)/9,81*PI()*(C7325)^2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
7318			0,7312	5441566,709	7255422,278	0,01156286	0,01079156		115,4695784
7319			0,7313	5440822,614	7254430,151	0,01156267	0,0107914		115,3904652
7320			0,7314	5440078,722	7253438,296	0,01156248	0,01079124		115,3114189
7321			0,7315	5439335,034	7252446,712	0,01156229	0,01079109		115,2324394
7322			0,7316	5438591,549	7251455,399	0,0115621	0,01079093		115,1535267
7323			0,7317	5437848,267	7250464,357	0,01156191	0,01079077		115,0746806
7324			0,7318	5437105,189	7249473,585	0,01156172	0,01079061		114,9959011
7325			0,7319	5436362,314	7248483,085	0,01156153	0,01079045		114,9171881
7326			0,732	5435619,641	7247492,855	0,01156134	0,01079029		114,8385416
7327			0,7321	5434877,172	7246502,895	0,01156115	0,01079013		114,7599616
7328			0,7322	5434134,905	7245513,206	0,01156096	0,01078998		114,6814479
7329			0,7323	5433392,841	7244523,788	0,01156077	0,01078982		114,6030004
7330			0,7324	5432650,979	7243534,639	0,01156058	0,01078966		114,5246192
7331			0,7325	5431909,321	7242545,761	0,01156039	0,0107895		114,4463041
7332			0,7326	5431167,864	7241557,152	0,0115602	0,01078934		114,3680552
7333			0,7327	5430426,61	7240568,814	0,01156001	0,01078918		114,2898722
7334			0,7328	5429685,559	7239580,745	0,01155982	0,01078903		114,2117552
7335			0,7329	5428944,709	7238592,945	0,01155963	0,01078887		114,1337041
7336			0,733	5428204,062	7237605,416	0,01155944	0,01078871		114,0557188
7337			0,7331	5427463,617	7236618,155	0,01155925	0,01078855		113,9777993
7338			0,7332	5426723,373	7235631,164	0,01155906	0,01078839		113,8999455
7339			0,7333	5425983,332	7234644,443	0,01155887	0,01078824		113,8221573
7340			0,7334	5425243,492	7233657,99	0,01155868	0,01078808		113,7444347
7341			0,7335	5424503,855	7232671,806	0,01155849	0,01078792		113,6667777
7342			0,7336	5423764,418	7231685,891	0,0115583	0,01078776		113,589186

Hemos obtenido: $\boxed{D = 0{,}7319\ [m]}$

b) Para calcular el coeficiente de pérdidas (k) de la válvula del ramal II tenemos que saber que al tratarse de una bifurcación es necesario que la pérdida de energía por una rama deba ser igual a la pérdida de energía de la otra.

$$\Delta H_{cont}^{I} = \Delta H_{cont}^{II} + \Delta H_{válvula} \quad [12]$$

$$\frac{f^{I} * 8 * 2{,}5^2}{\pi^2 g 0{,}7319^5} 3000 = \frac{f^{II} * 8 * 2{,}5^2}{\pi^2 g (2 * 0{,}7319)^5} 3000 + k \frac{8 * 2{,}5^2}{\pi^2 g (2 * 0{,}7319)^4} \quad [13]$$

Por Colebrook obtenemos: f^{I}= 0,0115899 ; f^{II}=0,0119633

Resolviendo la ecuación [13] tenemos que $\boxed{k = 735{,}58}$

c) La línea de energía es aquella cuya cota es el valor total de la energía (H) en el punto, es decir, el valor del trinomio de Bernoulli particularizado a ese punto. La línea piezométrica representa como su nombre indica, la cota piezométrica del punto (h), es decir, hasta dónde subiría el agua si hiciéramos una perforación a la tubería en ese punto.

$$H = z + \frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \quad ; \quad h = z + \frac{P}{\gamma} \quad \rightarrow \quad H = h + \frac{v^2}{2g} \quad [14]$$

Como vemos con la ecuación [14] van a ser dos líneas paralelas distanciadas el valor del término de la velocidad en ese punto. ¡Ojo!, el término de la velocidad cambia en cada uno de los 3 tramos (I,II,impulsión) por lo que tendremos que tener cuidado a la hora de distanciar la línea de energía de la piezométrica.

Con todas las ecuaciones expuestas arriba, vamos calculando todos los incrementos o disminuciones de energía posibles en nuestro esquema:

PERDIDAS		GANANCIAS
Continuas	$\Delta H_{cont}^{I} = 85{,}5\ [m]$ $\Delta H_{cont}^{II} = 2{,}76\ [m]$ $\Delta H_{cont}^{imp} = 28{,}04\ [m]$	$\Delta H_{bomba} = 314{,}89\ [m]$
Locales	$\Delta H_{local}^{entrada} = 1{,}42\ [m]$ $\Delta H_{local}^{valvula} = 82{,}74\ [m]$	
$\sum Perdidas^{I} = 85{,}5 + 28{,}04 + 1{,}42 = 114{,}96$ $\sum Perdidas^{II} = 2{,}76 + 82{,}74 + 28{,}04 + 1{,}42 = 114{,}96$		$\sum Ganancias = 314{,}89$

Paremos a analizar la tabla. Lo primero de todo es ver cómo se comprueba lo que se expuso al principio del apartado b), que la energía perdida en una bifurcación tiene que ser igual por los dos ramales. Por tanto si vamos de (1) a (2) por cualquiera de los dos ramales, las pérdidas totales serán las mismas.

Además, se cumple la ecuación [1], la más general posible, tanto si vamos por el ramal I de la bifurcación o si vamos por el ramal II:

$$H_1 + \Delta H_{Ganancias} = H_2 + \Delta H_{Pérdidas}$$

$$1000 + 314{,}89 \approx 1200 + 114{,}96 \qquad [15]$$

Tiene lógica que para salvar una distancia (1200-1000=200) haya que aportar al sistema (314,89) dicha distancia más lo que se pueda perder por el camino (200+114,96≈314,89). Al fin y al cabo, la energía ni se crea ni se destruye.

Si escogemos empezar la línea de energía desde el depósito 1, partimos de la cota del depósito y vamos sumando o restando las pérdidas o ganancia que nos vayamos encontrando por el camino hasta llegar al punto (2).