Apuntes de Hidráulica

POLITÉCNICA

“Ingeniamos el futuro”

Hidrodinámica

E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

Jaime García Palacios

2025

El autor agradece especialmente la colaboración de Cristian Ponce Farfán en la realización de algunos figuras y redacción de problemas de esta obra.

Otros autores que también han contribuido son:

- Cristian Ponce Farfán
- Luis Garrote de Marcos
- Luis Mediero Orduña
- Francisco Laguna Peñuelas
- Antonio Lastra de la Rubia
- Isabel Granados García
- Eduardo Martínez Marín
- Eduardo Martínez Olmos

El autor agradece las sugerencias, correcciones y contribuciones que puedan mejorar el siguiente contenido:

jaime.garcia.palacios@upm.es

Contents

Hidrodinámica

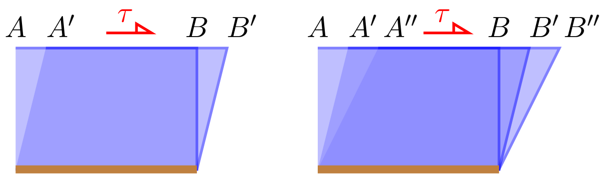
III

3.1 Introducción

La **Hidrodinámica** es la parte de la mecánica que estudia el comportamiento de los fluidos (líquidos y gases).

En un sólido, la deformación se mantiene mientras se siga aplicando la fuerza que la produce. El equilibrio se produce entre al fuerza aplicada y la deformación producida.

Deformación del sólido rígido: La deformación se mantiene constante mientras actúa la fuerza



Deformación del fluido: La deformación aumenta mientras se mantiene el movimiento

Figura 3.1: Deformación de un sólido rígido y un fluido

En un fluido, se produce deformación cuando existe movimiento. Este es el responsable de producir el esfuerzo cortante que provoca la deformación de la partícula. En este caso, se establece un **equilibrio dinámico** entre la velocidad de deformación y el esfuerzo cortante.

Las fuerzas actuantes en la mecánica de fluidos en movimiento son:

- Gravedad
- Presión
- Fuerzas viscosas: Producen esfuerzo cortante en las partículas debido a la diferencia de velocidad relativa entre ellas
- Fuerzas inerciales: Se encuentran asociadas a la masa en movimiento

De ellas, las dos primeras ya existían en la hidrostática, añadiéndose las dos últimas con el movimiento.

3.2 Clasificación de la mecánica de fluidos

3.2.1 Respecto del método de cálculo

- Analítica: Basada en el desarrollo de la formulación teórica.
- Experimental: Basada en el análisis sistemático de resultados y experiencias de laboratorio.
- Computacional: Basadas en el uso de ordenadores para resolver las ecuaciones en diferencias finitas del movimiento euleriano, o del enfoque lagrangiano (método de las partículas).

3.2.2 Respecto de la forma de cálculo

Coordenadas Eulerianas

Planteamiento debido a Euler (1707-1783) que estudia un punto o un volumen fijo en el espacio. Las ecuaciones expresan los cambios de masa, cantidad de movimiento o energía en el volumen o punto de control.

Las ecuaciones son de la forma:

$$\overrightarrow{v} = v\left(x, y, z, t\right) \tag{3.1}$$

siendo $\overrightarrow{x} = (x, y, z)$ el punto en el espacio y t el tiempo.

Coordenadas Lagrangianas

Planteamiento debido a Lagrange (1736-1813) que estudia la trayectoria y deformación de cada partícula a lo largo del tiempo. Este planteamiento es el más habitual en sólidos. En los fluidos se requiere una gran capacidad de cálculo por lo que esta aproximación no es la habitual. Sin embargo, en los últimos años y debido a la mejora informática, existen numerosos modelos numéricos con esta aproximación. En general se denominan modelos de partículas, con o sin malla, y ofrecen interesantes posibilidades para abordar problemas complejos difícilmente abordables por formulación euleriana. Estos están generalmente asociados con las condiciones de contorno que modifican mucho los problemas, como la interacción de las partículas con sólidos, arrastre de material sólido que se puede abordar de forma discreta, turbulencia, etc. En cualquier caso, se requiere todavía un elevado tiempo de computación, muchas partículas, y un mejor ajuste de estos modelos a problemas conjuntos de turbulencia y/o tensión superficial, especialmente cuando existe más de un fluido en acción (por ejemplo agua y aire).

Las ecuaciones son de la forma:

$$\overrightarrow{v} = v\left(r_x, r_y, r_z, t\right) \tag{3.2}$$

siendo $\overrightarrow{r} = (r_x, r_y, r_z)$ las coordenadas de la partícula que se estudia y t el tiempo.

Definiciones

Si se considera la velocidad como $\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}$ se puede definir:

- Variación espacial: Variación de la velocidad de un punto a otro del espacio para un mismo instante de tiempo.
- Variación temporal: Variación de la velocidad en un punto de un instante al siguiente.

Por tanto, podemos expresar la velocidad como:

$$\overrightarrow{v} = f(r, t) \tag{3.3}$$

En función de los siguientes casos:

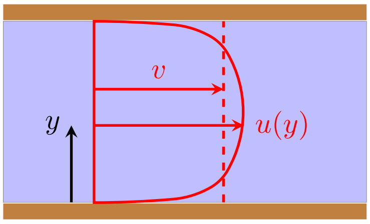
- $r = constante$, $t = variable \rightarrow$ Se conoce v en un punto en todos los instantes.
- $r = variable$, $t = constante \rightarrow$ Se conoce v en todos los puntos en un instante.
- $r = variable$, $t = variable \rightarrow$ Se conoce v en todos los puntos en todos los instantes.

Velocidad instantánea en un punto (u): Es la velocidad de una partícula que pasa por ese punto en el instante considerado.

Velocidad media en un punto ($\overrightarrow{u}$): Es la velocidad media en el punto de las velocidades instantáneas medidas en ese punto.

Velocidad media en una sección S (v): Valor medio, en el espacio, de las velocidades en todos los puntos de la sección.

$$v = \frac{\int_S u ds}{S} \tag{3.4}$$



3.2.3 Respecto del tipo de movimiento

- Por su variación en el tiempo:
  - Régimen permanente: La velocidad es la misma en cada punto en todos los instantes. Puede variar de un punto a otro.
  - Régimen variable: En un punto, la velocidad no es constante en el tiempo.
- Por su variación en el espacio:
  - Régimen uniforme: En un instante, la velocidad es la misma a lo largo de una línea de corriente.

  - Régimen variado: En un instante, la velocidad es distinta a lo largo de una misma línea de corriente.

- Por el tipo de régimen:
  - Laminar: Las partículas se mueven según trayectorias cuasiparalelas.
  - Turbulento: El movimiento es desordenado con una dirección predominante de avance.

- Por la rotación de la partícula:
  - Rotacional: La partícula gira alrededor de si misma.
  - Irrotacional: No se produce ese giro. Esto es imposible en fluidos reales.

Definiciones

Línea de corriente: Línea envolvente de los vectores velocidad en un instante determinado.

Trayectoria: Curva que recorre una partícula a lo largo del tiempo.

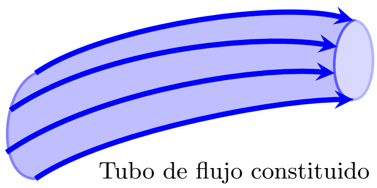
Línea de traza: Trayectoria de las partículas que pasan por un punto fijo. Es un concepto de laboratorio.

Nota

En régimen permanente las líneas de corriente, traza y trayectoria son coincidentes

3.2.4 Propiedades de las líneas de corriente

- En un instante de tiempo solo pasa una única línea de corriente por un punto. Esto implica que las líneas de corriente no se pueden cortar.
- Un haz de líneas de corriente apoyadas unas en otras es impenetrable. Esto constituye un **tubo de flujo**.
- La velocidad en los puntos del contorno es tangente al mismo. En el caso particular de movimiento plano, el contorno es una línea de corriente.



Tubo de flujo constituido por líneas de corriente formando un contorno cerrado

Los contornos influyen en la forma que adopta el fluido. Esos pueden ser:

- Contornos fijos: Son aquellos que permanecen invariables en el tiempo. Por ejemplo las paredes de una tubería.
- Contornos móviles: Son los que varían con el tiempo. Por ejemplo, los álabes de una bomba.
- Superficie libre: Es el contorno que tiene una presión igual a ambos lados.

En los dos primeros, la velocidad en cada instante de tiempo es tangente al contorno. No así en la superficie libre, donde puede ser perpendicular al mismo, produciendo deformación en ese sentido, como ocurre con las olas del mar.

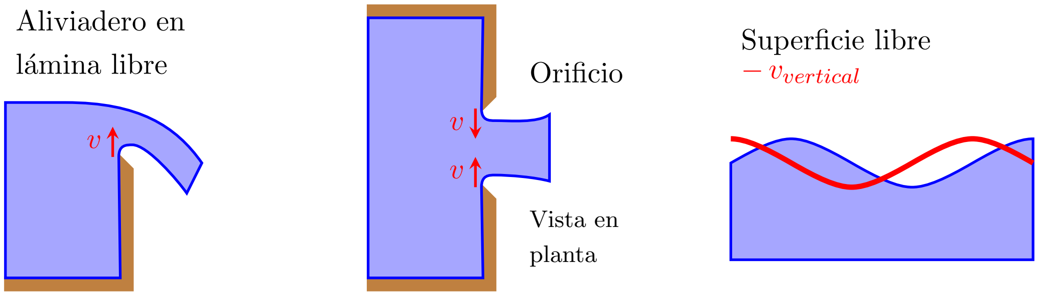


Figura 3.2: Contornos rígidos y superficie libre

3.3 Aceleración

Si se define la aceleración como en la mecánica clásica:

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} \tag{3.5}$$

y se tiene en cuenta que la velocidad puede expresarse en función del versor tangente ($\overrightarrow{\tau}$) como:

$$\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{\tau} \tag{3.6}$$

se llega a:

$$\overrightarrow{a} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{\tau} + v\frac{d\overrightarrow{\tau}}{dt} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{\tau} + v\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} \tag{3.7}$$

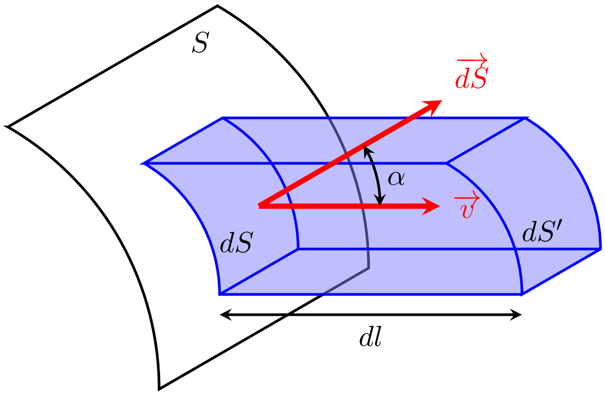
siendo s la trayectoria seguida por la partícula.

Considerando que $\frac{ds}{dt} = v$ y que con el tiedro de Frenet, se tiene que $\frac{d\overrightarrow{\tau}}{dt} = \frac{\overrightarrow{n}}{R_c}$ siendo $\overrightarrow{n}$ el versor normal y R_c el radio de curvatura, se obtiene:

$$\overrightarrow{a} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{\tau} + \frac{v^2}{R_c}\overrightarrow{n} \tag{3.8}$$

Es decir, la aceleración se puede descomponer en una componente tangencial $\left(\frac{dv}{dt}\overrightarrow{\tau}\right)$ y otra normal $\left(\frac{v^2}{R_c}\overrightarrow{n}\right)$. Esto implica que un movimiento curvo con velocidad constante tiene aceleración.

3.4 Caudal



Se define el **Caudal medio** como el volumen ΔV que atraviesa la sección S por unidad de tiempo Δt

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} \tag{3.9}$$

El **Caudal instantáneo** se corresponde con el caudal medio en un instante infinitesimal de tiempo:

$$Q_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt} \tag{3.10}$$

Si en una superficie S consideramos un elemento diferencial (dS), y se estudia el fluido que atraviesa esta superficie en un intervalo de tiempo dt, se comprueba que las partículas que en $t = 0$ atravesaban el dS estarán formando una nueva superficie dada por dS' en el tiempo $t = dt$.

La distancia recorrida en ese intervalo de tiempo por las partículas de fluido será:

$$dl = |\overrightarrow{v}|dt \tag{3.11}$$

Por tanto, el prisma dV representa el volumen de fluido que ha atravesado la superficie dS en el intervalo de tiempo dt. Este puede expresarse:

$$dV = dS\, dl\, cos\alpha = dScos\alpha|\overrightarrow{v}|dt = d\overrightarrow{S} \odot \overrightarrow{v}\, dt \tag{3.12}$$

siendo:

$d\overrightarrow{S}$	Vector normal a la superficie de modulo dS
$dScos\alpha$	Proyección de la superficie dS sobre la normal a la velocidad
$\odot$	Producto escalar de vectores

En este caso, el caudal instantáneo puede expresarse:

$$Q_i = dQ = \frac{dV}{dt} = \overrightarrow{dS} \odot \overrightarrow{v} \tag{3.13}$$

Integrando este caudal para toda la superficie S:

$$Q = \int_S \overrightarrow{dS} \odot \overrightarrow{v} \tag{3.14}$$

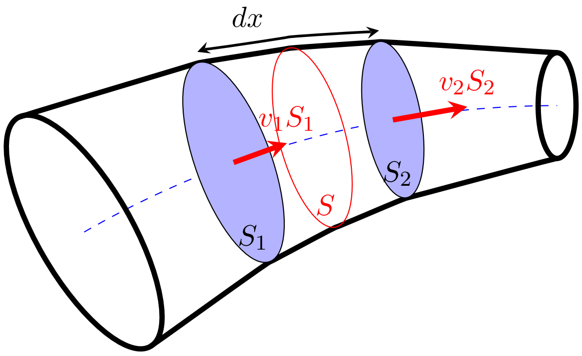
que puede interpretarse como que *'El caudal fluido que pasa por una superficie S, es el flujo del vector velocidad a través de dicha superficie'*

Cuando la superficie es perpendicular a la velocidad en cada uno de los puntos, se cumple:

$$Q = \int_S \overrightarrow{dS} \odot \overrightarrow{v} = \int_S udS = vS \tag{3.15}$$

es decir, el caudal es igual a la velocidad media en la sección multiplicada por la sección.

3.5 Ecuación de conservación de la cantidad de masa



En un recinto cerrado formado por un tubo de flujo, la masa que entra en un instante de tiempo menos la que sale es igual a la masa fluida almacenada en su interior.
Considerando las superficies S_1 y S_2, separadas un dx y perpendiculares al eje del tubo, el volumen fluido contenido entre ambas (dV), será:

$$dV = Sdx \tag{3.16}$$

Tomando S como la superficie media entre ambas, se puede definir, para ese volumen:

- Caudal entrante: $Q_1 = v_1S_1$
- Caudal saliente: $Q_2 = v_2S_2$

Considerando un dt, se tiene que la masa almacenada en el volumen en el tiempo t se corresponde con:

$$dm|_t = \rho\, dV = \rho\, S\, dx \tag{3.17}$$

y en el tiempo $t + dt$:

$$dm|_{t+dt} = \rho\, S\, dx + \frac{\partial\,(\rho\, S)}{\partial t} dt\, dx \tag{3.18}$$

lo que implica un incremento de:

$$dm|_{t+dt} - dm|_t = \frac{\partial\,(\rho\, S)}{\partial t} dt\, dx \tag{3.19}$$

en el intervalo de tiempo diferencial considerado.

Estudiando ahora el flujo másico que entra y sale a través de las superficies S_1 y S_2, se tiene:

$$dm = \rho\, dV = \rho\, S\, dx = \rho\, v\, S\, dt = \rho\, Q\, dt \tag{3.20}$$

- Masa entrante en S_1: $dm_1 = \rho_1 Q_1 dt = \rho_1 v_1 S_1 dt$
- Masa saliente en S_2: $dm_2 = \rho_2 Q_2 dt = \rho_2 v_2 S_2 dt = \rho_1 v_1 S_1 dt + \frac{\partial(\rho\, v\, S)}{\partial x} dx\, dt$

El aumento de masa contenida en el volumen de control, en ese mismo dt, en este caso vendrá dado por:

$$dm_1 - dm_2 = \rho_1 v_1 S_1 dt - \rho_2 v_2 S_2 dt = -\frac{\partial\,(\rho\, v\, S)}{\partial x} dx\, dt \tag{3.21}$$

que, por el principio de conservación de la masa, debe corresponderse con el incremento de masa almacenada en el volumen de control en el instante de tiempo dt. Por tanto:

$$-\frac{\partial\,(\rho\, v\, S)}{\partial x} dx\, dt = \frac{\partial\,(\rho\, S)}{\partial t} dt\, dx \qquad \longrightarrow \qquad \frac{\partial\,(\rho\, S)}{\partial t} + \frac{\partial\,(\rho\, v\, S)}{\partial x} = 0 \tag{3.22}$$

que es la denominada **ecuación de conservación de la masa**. A esta ecuación también se la conoce como ecuación de continuidad en un conducto.

3.5.1 Casos particulares de la ecuación de conservación de la masa

Movimiento permanente

En este caso, no hay variación en el tiempo ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$). Por tanto, ($\frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \rightarrow Q = \text{cte en el tiempo}$), lo que implica que:

$$\frac{\partial\,(\rho\, v\, S)}{\partial x} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \rho\, v\, S = \text{cte en el espacio} \tag{3.23}$$

Esto puede enunciarse como, *'la masa fluida que atraviesa la sección por unidad de tiempo es constante'*

Fluido incompresible

Cuando el fluido es incompresible, la densidad permanece constante ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \rightarrow \rho = \text{cte}$), reduciéndose la ecuación (3.22) a:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial\,(v\, S)}{\partial x} = 0 \tag{3.24}$$

Fluido incompresible y tubo indeformable

Si, adicionalmente se considera que el tubo es indeformable ($\frac{\partial S}{\partial t} = 0$), se llega a:

$$\frac{\partial\,(v\, S)}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad v\, S = Q = \text{cte en el espacio} \tag{3.25}$$

lo que implica que el caudal es constante en x en un mismo instante de tiempo, pudiendo ser diferente para otro tiempo considerado.

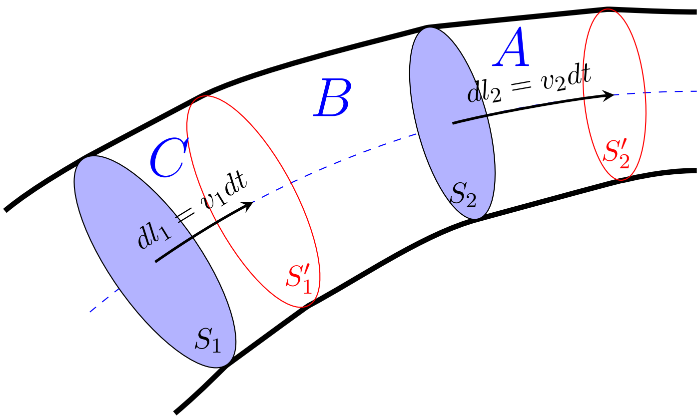
Movimiento permanente del fluido incompresible y tubería indeformable

Si se considera un fluido incompresible ($\rho = \text{cte}$) en movimiento permanente ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), entonces se tiene que el caudal es constante en el tiempo t y en el espacio x $\left(\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0\right)$.

3.6 Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento se deduce al igualar las fuerzas internas debidas a la variación de la cantidad de movimiento en un volumen de control en un diferencial de tiempo con las fuerzas externas actuantes. Es decir:

$$\overrightarrow{F_{int}} = \frac{\partial (mv)}{\partial t} = \overrightarrow{F_{ext}} \tag{3.26}$$



En primer lugar se estudian las **fuerzas internas** que se producen en el volumen de control debido a la variación de la cantidad de movimiento.

Igual que se ha hecho para deducir a ecuación de conservación de la masa, se considera un volumen de control en el interior de un tubo de flujo, pero con la diferencia de que en este caso las secciones S_1 y S_2 no están infinitamente próximas, en el tiempo $t + dt$, las partículas que atravesaron las secciones S_1 y S_2 en t se encontrarán en S'_1 y S'_2 respectivamente.

La masa m asociada al volumen V que atraviesa una sección S en el diferencial de tiempo dt viene dada por:

$$m = \rho V = \rho S v dt \tag{3.27}$$

Volviendo a la ecuación (3.26) y considerando la variación de la cantidad de movimiento como la cantidad de movimiento ganada en el volumen A más la perdida en C y más la variación sufrida en el volumen B se llega a:

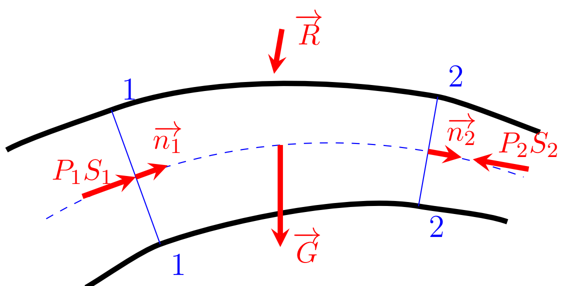
$$\overrightarrow{F_{int}} = \frac{dm_2 \overrightarrow{v_2}}{dt} - \frac{dm_1 \overrightarrow{v_1}}{dt} + \frac{dm_V \overrightarrow{v}}{dt} = \frac{\rho_2 (S_2 v_2 dt)\overrightarrow{v_2} - \rho_1 (S_1 v_1 dt)\overrightarrow{v_1} + \left(\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV\right)\overrightarrow{v}\, dt}{dt} \tag{3.28}$$

Teniendo en cuenta que $Q = vS$ y simplificando:

$$\overrightarrow{F_{int}} = \rho_2 Q_2 \overrightarrow{v_2} - \rho_1 Q_1 \overrightarrow{v_1} + \left(\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV\right)\overrightarrow{v} \tag{3.29}$$

Adicionalmente, sobre el volumen estarán actuando las siguientes **fuerzas externas**:

- Peso del fluido: $\overrightarrow{G}$
- Reacciones del contorno sobre el fluido incluyendo las fuerzas normales y las tangenciales ($\overrightarrow{\tau}$) en las paredes debidas a la viscosidad: $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{F_N} + \overrightarrow{F_\tau}$



donde $\overrightarrow{n}$ representa el versor perpendicular a la sección de actuación.

La resultante de todas estas fuerzas será:

$$\overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{G} + \overrightarrow{R} + P_1 S_1 \overrightarrow{n_1} - P_2 S_2 \overrightarrow{n_2} \tag{3.30}$$

Planteando el equilibrio entre las fuerzas internas (3.29) y externas (3.30) cuando el movimiento es permanente ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), se obtiene:

$$\overrightarrow{G} + \overrightarrow{R} + P_1 S_1 \overrightarrow{n_1} - P_2 S_2 \overrightarrow{n_2} = \rho_2 Q_2 \overrightarrow{v_2} - \rho_1 Q_1 \overrightarrow{v_1} \tag{3.31}$$

Considerando que $\overrightarrow{v_i} = v_i \overrightarrow{n_i}$, se reagrupa convenientemente llegándose a:

$$\overrightarrow{G} + \overrightarrow{R} + (\rho_1 Q v_1 + P_1 S_1)\,\overrightarrow{n_1} - (\rho_2 Q v_2 + P_2 S_2)\,\overrightarrow{n_2} = 0 \tag{3.32}$$

Al término $\overrightarrow{N_i} = (\rho_i Q v_i + P_i S_i)\,\overrightarrow{n_i}$ se le conoce como **impulsión en la sección i**, y es una fuerza que se aplica hacia el interior del volumen.

Nota

En el caso de movimiento permanente, y solo en él, la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento se puede plantear como un equilibrio estático de fuerzas en el que la cantidad de movimiento se sustituye por impulsiones aplicadas hacia el interior del volumen.

3.6.1 Comentarios sobre la ecuación de cantidad de movimiento

La reacción $\overrightarrow{R}$ del contorno sobre el fluido tiene una componente normal al contorno y otra tangencial. La componente normal del fluido sobre la tubería producirá una deformación de esta fuera del plano de circulación por lo que los anclajes de la conducción en los codos deben ser diseñados para contrarrestar esta componente. La componente tangencial también hay que tenerla en cuenta en el diseño de los anclajes. Un planteamiento más riguroso de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento obligaría a integrar los valores de estas reacciones a lo largo del contorno de la tubería.

Asimismo, el sentido de $\overrightarrow{R}$ no depende del sentido de circulación del agua, sino de la fuerza necesaria para que una determinada cantidad de masa fluida modifique su dirección de circulación.

En conducciones a presión (tuberías), el valor del término PS de la impulsión suele ser muy superior al debido a $\rho Q v$.

En el caso de que la distribución de velocidades en la sección no sea uniforme el valor de la impulsión debe tomarse como:

$$N = \rho \int_S v^2 dS + \int_S P dS \tag{3.33}$$

Si utilizamos un coeficiente β dado por:

$$\beta = \frac{\int_S u^2 dS}{v^2 S} \tag{3.34}$$

y una presión media definida como:

$$\overline{P} = \frac{\int_S P dS}{S} \tag{3.35}$$

se puede expresar la impulsión como:

$$N = \rho \beta v^2 S + \overline{P} S \tag{3.36}$$

siendo v la velocidad media en la sección.

El valor de β es siempre mayor o igual a uno, dada la definición matemática de este coeficiente. El valor de $\beta = 1$ se obtiene para una distribución uniforme de velocidades en la sección, donde la velocidad en cada punto coincide con la media. Valores elevados de β indican pérdida de uniformidad. En el caso de régimen laminar, se puede demostrar que el valor de $\beta = 4/3$.

El valor medio de la presión ($\overline{P}$) coincide con la presión en el centro de la sección cuando la sección inundada es simétrica respecto del eje medio, como es el caso de las secciones circulares de tubería y los canales rectangulares. En el caso de las tuberías existe una pequeña variación de presión entre el punto más alto y más bajo debido al incremento de presión por la gravedad. Esta variación sí tiene importancia en conducciones en lámina libre (canales) donde la altura de la lámina libre puede tener varios metros de diferencia con respecto a la solera, siendo la presión relativa 0 en la superficie y máxima en el fondo. En la hidrostática ya se ha demostrado que para variaciones lineales de la presión con la profundidad, el valor de $\overline{P}S$ (empuje sobre la sección) coincide con el valor de la presión a la profundidad del cdg de la sección considerada multiplicada por la sección. No así su punto de aplicación que estará situado por debajo en el centro de presiones.

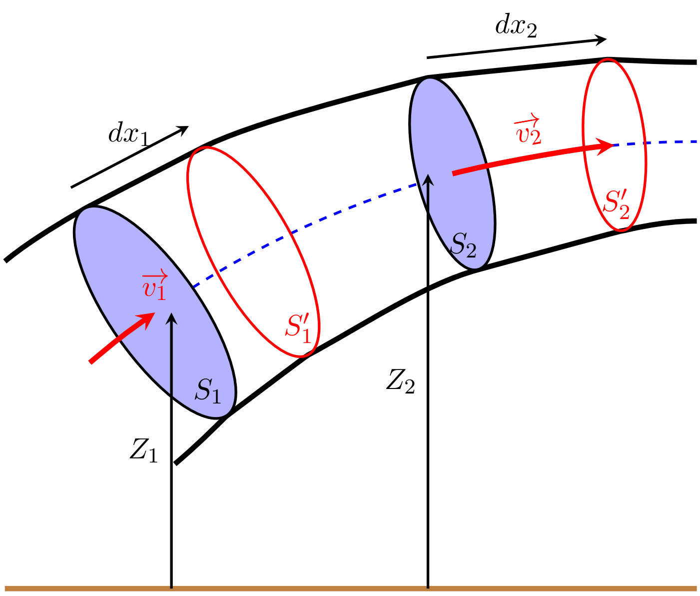
3.7 Ecuación de conservación de la energía

Estudiando la conservación del flujo de energía entre dos secciones del volumen de control frente al trabajo realizado por las fuerzas externas actuantes se deduce la ecuación de conservación de la energía.

$$\Delta E_{12} = \sum W_{F_{ext}} \tag{3.37}$$

El estudio se va a realizar bajo las hipótesis de:

- Régimen permanente $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$
- Fluido incompresible $(\rho = cte)$
- Pared indeformable $\left(\frac{\partial S}{\partial t} = 0\right)$



Para el estudio de la variación de energía, se van a considerar las variaciones de energía potencial (E_p) y cinética (E_c) entre las secciones de salida y entrada del volumen de control en el tiempo dt.

Durante ese intervalo de tiempo, las partículas que atravesaron la secciones 1 y 2 al inicio habrán avanzado hasta las secciones $1'$ y $2'$ respectivamente. Si consideramos las masas que entran (dm_1) y salen (dm_2) del volumen de control se tiene:

- Masa que entra: $dm_1 = \rho_1 dV_1 = \rho_1 S_1 dx_1$
- Masa que sale: $dm_2 = \rho_2 dV_2 = \rho_2 S_2 dx_2$

siendo:

ρ	Densidad del fluido	(kg/m^3)
S	Área de la sección atravesada	(m^2)
dV	Diferencial de volumen que entra (1) o sale (2) del volumen de control en el intervalo de tiempo considerado	(m^3)

Asumiendo las hipótesis anteriormente enunciadas de régimen permanente, fluido incompresible y pared indeformable y teniendo en cuenta la conservación de la masa, el diferencial de masa que entra (dm_1) es igual al diferencial de masa que sale (dm_2):

$$dm = dm_1 = dm_2 \tag{3.38}$$

La variación de energía entre las secciones 1 y 2 se estudia como:

- Variación de la energía potencial:

$$\left.\begin{aligned} Ep_1 &= dm_1 \cdot g \cdot Z_1 \\ Ep_2 &= dm_2 \cdot g \cdot Z_2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \Delta Ep_{12} = Ep_2 - Ep_1 = g \cdot dm\,(Z_2 - Z_1) \tag{3.39}$$

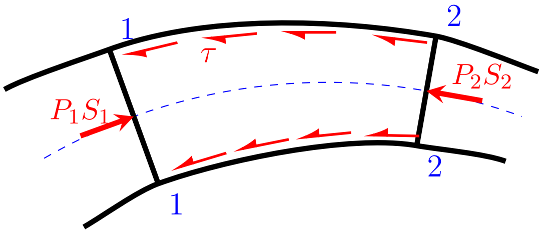
- Variación de la energía cinética:

$$\left.\begin{aligned} Ec_1 &= \tfrac{1}{2} dm_1 \cdot \alpha_1 \cdot v_1^2 \\ Ec_2 &= \tfrac{1}{2} dm_2 \cdot \alpha_2 \cdot v_2^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \Delta Ec_{12} = Ec_2 - Ec_1 = \frac{1}{2} dm \left(\alpha_2 v_2^2 - \alpha_1 v_1^2\right) \tag{3.40}$$

siendo, α el coeficiente de coriolis que se define en la ecuación 3.51.

El **trabajo de las fuerzas exteriores** se obtiene del producto de la fuerza aplicada por el desplazamiento que provoca.

$$W = F \cdot dx \tag{3.41}$$



Considerando las siguientes expresiones deducidas de la diferencia de masa en cada una de las secciones afectadas:

$$dm = \rho \cdot V = \rho \cdot S \cdot dx \quad \rightarrow \quad \left.\begin{aligned} S \cdot dx &= \tfrac{dm}{\rho} \\ dx &= \tfrac{dm}{\rho \cdot S} \end{aligned}\right\} \tag{3.42}$$

Identificando cada una de las fuerzas actuantes:

- Trabajo de las fuerzas de presión:

$$Fp_1 = P_1 S_1 \quad \rightarrow \quad W_{Fp_1} = P_1 S_1 dx_1 = P_1 S_1 \frac{dm}{\rho} \tag{3.43}$$

$$Fp_2 = P_2 S_2 \quad \rightarrow \quad W_{Fp_2} = P_2 S_2 dx_2 = P_2 S_2 \frac{dm}{\rho}$$

$$W_{Fp} = W_{Fp_1} - W_{Fp_2} = \frac{dm}{\rho}\left(P_1 - P_2\right) \tag{3.44}$$

- Trabajo de las fuerzas tangenciales debidas al rozamiento del fluido con las paredes. Las fuerzas que se oponen al movimiento tienen signo negativo:

$$W_{F_\tau} = -\tau P_e L dx = -\tau P_e L \frac{dm}{\rho \cdot S} \tag{3.45}$$

siendo:

τ	Tensión tangencial en el contorno del volumen de control	(N/m^2)
$P_e \cdot L$	Superficie del volumen de control donde se produce el rozamiento (perímetro por longitud)	(m^2)
dx	Desplazamiento medio del fluido en el volumen de control $dx = \frac{dx_1+dx_2}{2}$	(m)
S	Superficie media del volumen de control $S = \frac{S_1+S_2}{2}$	(m)

Igualando la variación de energía al trabajo de las fuerzas externas:

$$g \cdot dm\left(Z_2 - Z_1\right) + \frac{1}{2} dm\left(\alpha_2 v_2^2 - \alpha_1 v_1^2\right) = \frac{dm}{\rho}\left(P_1 - P_2\right) - \tau P_e L \frac{dm}{\rho \cdot S} \tag{3.46}$$

Reagrupando los términos y dividiendo por el peso del diferencial de masa $(g \cdot dm)$, se llega a:

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + \frac{\tau}{\gamma}\frac{P_e}{S} L \tag{3.47}$$

El término $\frac{P_e}{S} = \frac{1}{R_H}$ siendo R_H el radio hidráulico. Sustituyendo se obtiene la **Ecuación de conservación de la energía**:

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + \frac{\tau}{\gamma R_H} L \tag{3.48}$$

En esta expresión cada uno de los términos representa, en el punto de medida:

Z	Término de energía potencial	(m)
$\frac{P}{\gamma}$	Término de energía de presión	(m)
$\alpha \frac{v^2}{2g}$	Término de energía cinética	(m)
$\frac{\tau}{\gamma R_H} L$	Pérdida de energía entre los puntos de medida debida al rozamiento del fluido con el contorno	(m)

El último término denominado **pérdida de carga continua** (ΔH_c) puede expresarse en función de una perdida por metro lineal (I), denominada **pendiente de pérdidas**, y la longitud entre los puntos.

$$\Delta H_c = I \cdot L \quad \text{con} \quad I = \frac{\tau}{\gamma R_H} \tag{3.49}$$

Esta expresión de la energía, habitualmente utilizada, tiene claramente definidos los tres términos expresados como metros de columna de fluido equivalente. Es decir, la energía ha pasado a expresarse en metros cuando se ha dividido por el peso del diferencial de masa.

En el movimiento de un fluido perfecto, donde no se produce pérdida de energía por rozamiento, el valor de la energía permanece constante. Esta simplificación se realiza habitualmente cuando la distancia entre las secciones consideradas es corta.

Cuando el fluido es agua, es habitual expresar esta energía en metros de columna de agua, utilizándose como unidad (m.c.a).

3.7.1 Comentarios al Trinomio de Bernoulli

Teniendo en cuenta las hipótesis realizadas para la el planteamiento de las ecuaciones cabe destacar que:

- Las líneas de corriente tienen que ser paralelas en las secciones consideradas para que pueda cumplirse que $-\int_1^2 dPdV = (P_1 - P_2)\, dV$ lo que es habitual en el trasporte a través de tuberías.

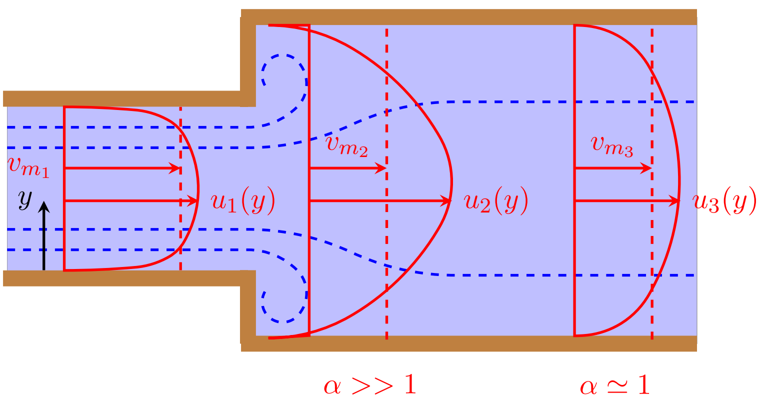
- En el caso de que las líneas de energía no puedan considerarse paralelas y la distribución de velocidades varíe mucho respecto de la media puede utilizarse una expresión dada por:

$$Z + \beta\frac{\overline{P}}{\gamma} + \alpha\frac{v^2}{2g} = \text{cte} \tag{3.50}$$

  siendo α el coeficiente de coriolis que corrige esta variación de velocidades dentro de la sección dado en la ecuación 3.40:

$$\alpha = \frac{\int_S u^3 dS}{v^3 S} \tag{3.51}$$

En general, α es un valor muy cercano a la unidad, aunque siempre superior a esta, dada su definición matemática, pero que en algunos casos puede ser mucho mayor que 1. Estos casos suelen deberse a perturbaciones locales debidas a variaciones bruscas en la sección de circulación como válvulas, cambios bruscos de sección, salidas de depósitos etc. En todos ellos es difícil evaluar las velocidades en la sección y por tanto definir un valor para el coeficiente de coriolis.



3.7.2 Líneas de energía y piezométrica

La línea de energía es la cota en metros correspondiente a la energía que lleva el fluido en cada punto y refleja los tres términos del trinomio de Bernoulli.

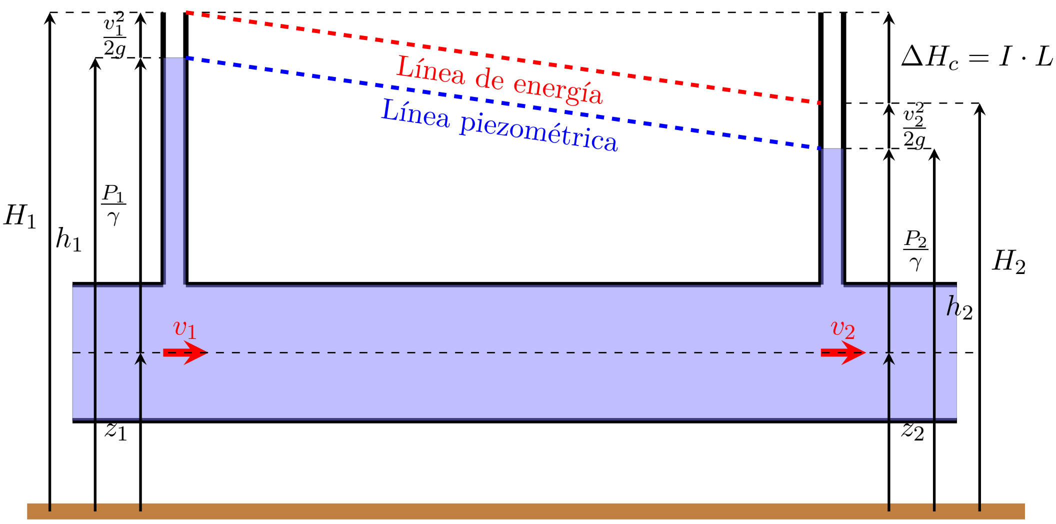


Figura 3.3: Líneas de energía y piezométrica

La línea piezométrica se corresponde con la altura que alcanzaría la superficie libre en la circulación. En una conducción en presión, en la que se realice un agujero perpendicular a la circulación del fluido y se sitúe un piezómetro, el líquido ascenderá hasta una altura igual al valor del término P/γ a través del piezómetro y tomando como referencia el eje de la tubería. Esta es la altura piezométrica (h) que será la suma de los términos $Z + \frac{P}{\gamma}$ del trinomio de Bernoulli.

$$h = Z + \frac{P}{\gamma} \tag{3.52}$$

En el caso mostrado en la figura 3.3, las líneas de energía y piezométrica resultan paralelas al haber considerado régimen permanente, sección constante e indeformable y fluido incompresible, lo que implica la igualdad de velocidades en ambas secciones al considerar la ecuación de conservación de la masa.

En el caso de circulación de flujo en lámina libre, como los canales, la altura de energía (H) dada por el trinomio de Bernoulli puede expresarse como:

$$H = Z + y + \alpha\frac{v^2}{2g} \tag{3.53}$$

siendo Z la cota desde la superficie de referencia a la solera del canal e y la cota de la superficie libre medida desde la solera (calado). El término $h = Z + y$ en canales representa la cota piezométrica que es directamente observable, ya que se corresponde con la lámina de agua.