

# Apuntes de Hidráulica



**POLITÉCNICA**

“Ingeniamos el futuro”



## Hidrostatica

*E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos*

**Jaime García Palacios**

**2025**

El autor agradece especialmente la colaboración de Cristian Ponce Farfán en la realización de algunos figuras y redacción de problemas de esta obra.

Otros autores que también han contribuido son:

- Cristian Ponce Farfán
- Luis Garrote de Marcos
- Luis Mediero Orduña
- Francisco Laguna Peñuelas
- Antonio Lastra de la Rubia
- Isabel Granados García
- Eduardo Martínez Marín
- Eduardo Martínez Olmos

El autor agradece las sugerencias, correcciones y contribuciones que puedan mejorar el siguiente contenido:

[jaime.garcia.palacios@upm.es](mailto:jaime.garcia.palacios@upm.es)



Hidráulica e Hidrología: Hidrostática  
se encuentra bajo una licencia Creative Commons Attribution-  
NonCommercial 4.0 International

# Contents

<b>2 Hidrostática</b>	<b>5</b>
2.1 Introducción . . . . .	5
2.2 Presión . . . . .	5
2.3 Ecuación General de la Hidrostática . . . . .	7
2.3.1 Casos particulares . . . . .	8
Ausencia de fuerzas exteriores . . . . .	8
Las fuerzas se derivan de un potencial $\psi$ . . . . .	9
El campo gravitatorio . . . . .	10
Líquidos incompresibles en el campo gravitatorio . . . . .	10
Gases en el campo gravitatorio . . . . .	11
Ejemplo: Actuación conjunta de dos campos equipotenciales . . . . .	11
Ejemplo: Presión en la base de un cilindro girando . . . . .	12
2.4 Presiones absolutas y relativas . . . . .	13
2.5 Empujes sobre superficies planas . . . . .	15
2.5.1 Obtención de la resultante del empuje sobre superficies planas . . . . .	17
Ejercicio 1 . . . . .	18
Ejercicio 2 . . . . .	18
2.6 Empuje sobre superficies curvas . . . . .	19
2.6.1 Método de Poincaré . . . . .	20
2.7 Flotación . . . . .	21
2.7.1 Equilibrio del sólido sumergido. Empuje de Arquímedes . . . . .	22

	Empujes horizontales sobre un sólido sumergido . . . . .	22
	Empujes verticales sobre un sólido sumergido . . . . .	23
2.7.2	Tensión efectiva . . . . .	24
2.7.3	Subpresión . . . . .	26
	Ejemplo: Subpresión bajo una presa de gravedad. . . . .	27
	Ejemplo: Fuerza necesaria para quitar un tapón. . . . .	28
2.7.4	Equilibrio del sólido semisumergido . . . . .	30
	Primer Teorema de Euler . . . . .	31
	Flotación estable de un cuerpo semisumergido . . . . .	32
	Segundo Teorema de Euler . . . . .	32
	Brazo estabilizador . . . . .	33
	Ejemplo: Flotación de una barcaza . . . . .	34
	Indicatriz de Dupín . . . . .	34
	Ejercicio 3 . . . . .	35
2.7.5	Equilibrio del sólido semisumergido con lastre líquido en su interior . . . . .	35
	Ejemplo: Flotación de una barcaza con lastre líquido interior . . . . .	36
	Ejemplo: Flotación de una barcaza con lastre líquido interior y separación con mamparas . . . . .	37
	Soluciones a los Ejercicios . . . . .	39

# Hidrostática



## 2.1 Introducción

La hidrostática es la parte de la mecánica que estudia los fluidos en reposo, o sin movimiento relativo entre las partículas. Por tanto, las tensiones tangenciales ( $\tau$ ) son nulas:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} = 0 \quad (2.1)$$

¿Quiere esto decir que el fluido no puede moverse?. La respuesta es que puede hacerlo mientras lo haga como un sólido rígido. El término ( $dv$ ) se refiere a la velocidad relativa entre las partículas de fluido y no a la velocidad del movimiento como sólido rígido.

Por ejemplo, considere un cilindro dispuesto en dirección vertical, lleno de agua, que está rotando con velocidad constante sobre su propio eje. Las partículas rotan con el cilindro con velocidad angular constante, pero siempre ocupan la misma posición relativa respecto del resto.

En el caso de  $\tau = 0$ , el tensor de tensiones de la partícula diferencial de fluido mostrada en la figura 2.1 se escribe:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} = 0 & \tau_{13} = 0 \\ \tau_{21} = 0 & \sigma_{22} & \tau_{23} = 0 \\ \tau_{31} = 0 & \tau_{32} = 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Es decir, en la hidrostática solo existen presiones normales que denominaremos presiones.

## 2.2 Presión

La presión ( $\mathbf{P}$ ) es un tensor de tensiones cuyos ejes principales son de igual magnitud ( $p$ ), por lo que muchas veces suele confundirse con un valor escalar, lo que es un error.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

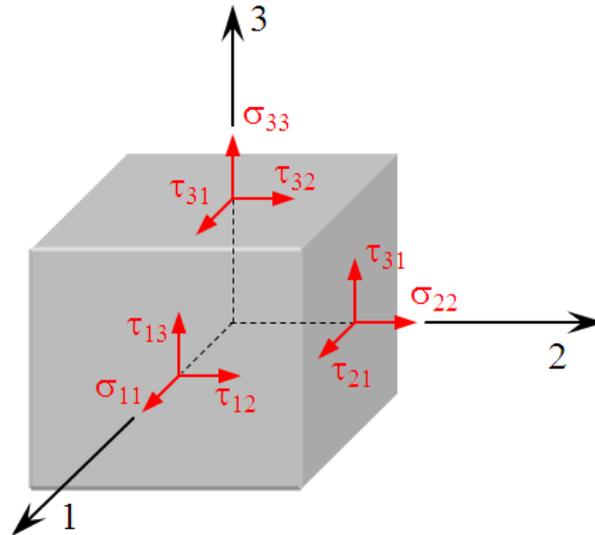


Figura 2.1: Tensor de tensiones en un elemento diferencial 3D

El valor negativo en el elemento diagonal es debido a que en la mecánica de los medios continuos se consideran positivas las tracciones (ver  $\sigma$  en la figura 2.1), mientras que la presión es una compresión de la partícula.

**Demostración:** Si estudiamos el elemento diferencial bidimensional mostrado en la figura 2.2, y tomamos como valor uniforme de la presión actuando sobre cada una de las caras las correspondientes al cdg del elemento ( $p$ ), al plantear el equilibrio de fuerzas, tanto en horizontal como vertical, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= p_x \cdot dy = F_s \cos \alpha = p \cdot ds \cos \alpha \\ F_y &= p_y \cdot dx = F_s \sin \alpha = p \cdot ds \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

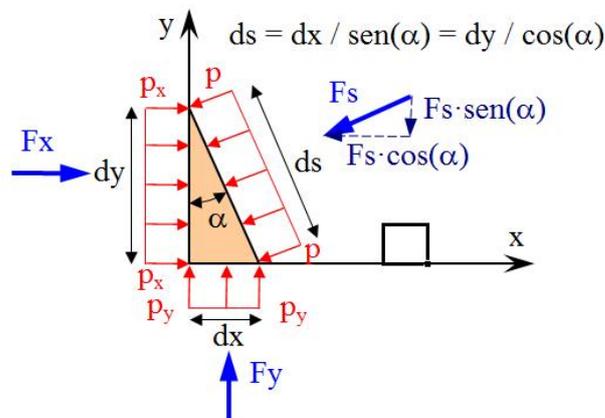


Figura 2.2: Presiones sobre un elemento diferencial en 2D

Como  $ds$  puede expresarse en función del ángulo  $\alpha$ , como:

$$ds = dx / \operatorname{sen} \alpha = dy / \operatorname{cos} \alpha \quad (2.5)$$

Sustituyendo (2.5) en (2.4), se demuestra que la presión  $p$  en todas las caras está en equilibrio:

$$\left. \begin{aligned} p_x \cdot dy &= p \cdot ds \operatorname{cos} \alpha = p \cdot \frac{dy}{\operatorname{cos} \alpha} \operatorname{cos} \alpha \\ p_y \cdot dx &= p \cdot ds \operatorname{sen} \alpha = p \cdot \frac{dx}{\operatorname{sen} \alpha} \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \right\} \rightarrow p = p_x = p_y \quad (2.6)$$

También se ha demostrado que la presión es independiente del ángulo  $\alpha$  de actuación.

Ampliando este mismo razonamiento en el espacio tridimensional se llega a que también existe equilibrio en la dirección  $z$ .

## 2.3 Ecuación General de la Hidrostática

Supongamos el volumen diferencial de la figura 2.3 sobre el que actúan unas fuerzas por unidad de volumen ( $G_x, G_y, G_z$ ) en las tres direcciones del espacio. Planteando el equilibrio de fuerzas en una de las direcciones, por ejemplo la  $z$ , se tiene:

$$\left( p - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy - \left( p + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy + G_z dx dy dz = 0 \quad (2.7)$$

donde el primero de los términos representa la fuerza actuando en la cara inferior del sólido en el sentido positivo del eje, el segundo es la fuerza sobre la cara superior actuando en el sentido negativo del eje y el tercero la fuerza en  $z$  actuando sobre todo el volumen diferencial.

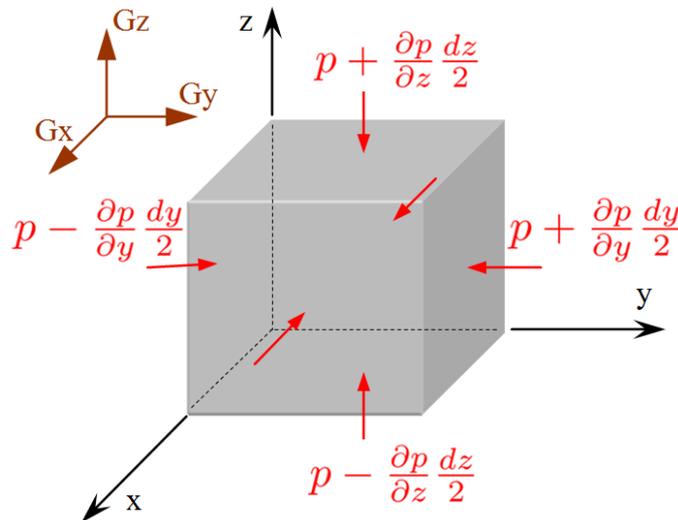


Figura 2.3: Equilibrio de fuerzas sobre un elemento diferencial

Operando, se llega a:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz + G_z dx dy dz = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{\partial p}{\partial z} + G_z = 0 \quad (2.8)$$

Trabajando de forma similar en los otros dos ejes, se llega al sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} + G_x &= 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + G_y &= 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + G_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Vectorialmente puede expresarse como:

$$\vec{G} = \overrightarrow{\text{grad}} P \quad (2.10)$$

Lo que constituye la **Ecuación General de la Hidrostática**

Observemos que el vector de fuerzas  $\vec{G}$  es perpendicular a las superficies de presión constante.

Es decir, el incremento de presión que se produce entre dos caras paralelas de una partícula diferencial es igual a la fuerza actuante por unidad de volumen en la dirección normal a ambas.

### 2.3.1 Casos particulares

A continuación se exponen una serie de casos particulares de aplicación de la ecuación general de la hidrostática para entender más claramente las implicaciones de la misma.

#### Ausencia de fuerzas exteriores

La ausencia de fuerzas exteriores implica que  $\vec{G} = 0$ , por tanto:

$$\vec{G} = \overrightarrow{\text{grad}} P = 0 \quad \rightarrow \quad P = \text{cte} \quad (2.11)$$

Esto es lo que se denomina el **Principio de Pascal**, que se enuncia a continuación:

*'En un determinado recinto donde tenemos un fluido, cualquier incremento de presión ( $p$ ) que podamos ejercer en un punto se traslada instantáneamente a todos los puntos del fluido'*

La aplicación práctica más conocida es la prensa hidráulica. Ésta puede verse en la figura 2.4.

Cuando analizamos la prensa hidráulica, podemos expresar:

$$P = \frac{F}{S} = \frac{F^*}{S^*} \quad \rightarrow \quad F^* = F \frac{S^*}{S} \quad (2.12)$$

Esto significa que con una pequeña fuerza ( $F$ ) ejercida sobre el émbolo de menor sección ( $S$ ) podemos elevar un gran peso ( $F^*$ ) situado sobre el émbolo de mayor superficie ( $S^*$ ).

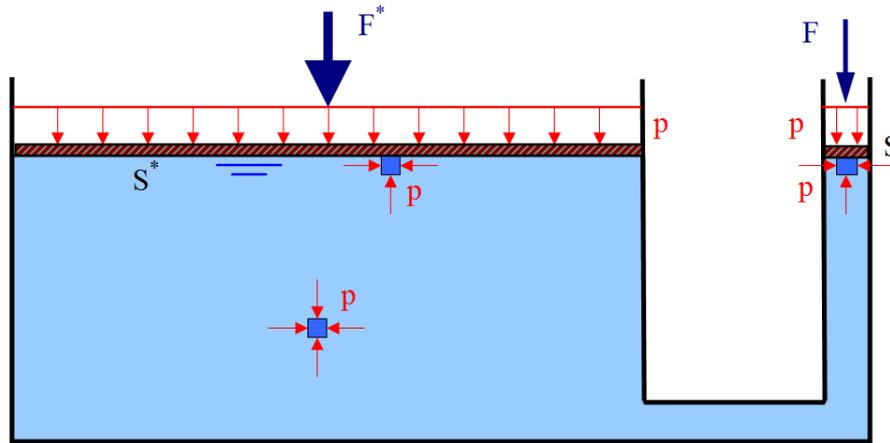


Figura 2.4: Aplicación del principio de Pascal a la prensa hidráulica

El siguiente vínculo muestra un video muy interesante de aplicación del principio de pascal aplicado a sistemas neumáticos. Cabe destacar las explicaciones entre los minutos 1:10 y 3:30



[hydraulic and pneumatic part 1](#)

### Las fuerzas se derivan de un potencial $\psi$

Esta hipótesis es la que ocurre con las fuerzas másicas. En este caso,  $\vec{G}$  puede expresarse como:

$$\vec{G} = -\rho \overrightarrow{\text{grad}} \psi \quad (2.13)$$

Entonces, la expresión de la ecuación general de la hidrostática (2.10) se convierte en:

$$\rho \overrightarrow{\text{grad}} \psi + \overrightarrow{\text{grad}} P = 0 \quad (2.14)$$

Por tanto:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \rho \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \rho \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

que vectorialmente puede expresarse como:

$$\rho \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \quad (2.16)$$

Multiplicando por  $dx_i$ , se llega a las tres ecuaciones siguientes:

$$\rho \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i = 0 \quad (2.17)$$

La igualdad anterior ha de cumplirse también para el conjunto de las tres ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^{i=3} \left[ \rho \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i \right] = 0 \quad \rightarrow \quad \rho d\psi + dP = 0 \quad (2.18)$$

Esto demuestra que, en la hidráulica, las líneas de presión constante (isobaras) coinciden con las líneas de igual potencial (equipotenciales).

### El campo gravitatorio

El campo gravitatorio representa un caso particular de fuerza derivada de un potencial cuya única fuerza tiene dirección vertical y puede expresarse como:

$$\vec{G} = (0, 0, -\gamma) \quad (2.19)$$

siendo  $\gamma$  el peso específico.

El signo negativo del peso específico viene dado por que la fuerza se dirige en el sentido contrario al eje  $z$  que se considera positivo a medida que nos alejamos de la superficie de la Tierra.

El potencial asociado a esta fuerza viene dado por:

$$\psi = gh \quad (2.20)$$

siendo  $g$  la aceleración de la gravedad, y  $h$  la altura medida en el sentido positivo del eje  $z$ .

Sustituyendo este potencial en la ecuación (2.18), se tiene:

$$dP = -\rho d\psi = -\rho g dh \quad (2.21)$$

Dividiendo por  $\rho$ :

$$\frac{dP}{\rho} = -g dh \quad (2.22)$$

lo que representa la **ecuación de la hidrostática en la vertical del campo gravitatorio**.

### Líquidos incompresibles en el campo gravitatorio

Normalmente, dentro del campo de la hidráulica, trabajaremos con líquidos a los que podemos considerar como incompresibles. En ese caso, podemos considerar  $\rho = \text{cte}$  y la ecuación (2.22) se puede integrar entre límites conocidos:

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dP}{\rho} = - \int_{h_1}^{h_2} g dh \quad \rightarrow \quad \frac{p_2 - p_1}{\rho} = -g (h_2 - h_1) \quad (2.23)$$

O lo que es lo mismo:

$$\Delta P = -\rho g \Delta h = -\gamma \Delta h \quad (2.24)$$

La ecuación anterior implica que la presión, en el interior de un fluido, disminuye linealmente al aumentar la altura. Esta relación es directamente proporcional al peso específico del fluido.

## Gases en el campo gravitatorio

Los gases son fluidos en los que no pueden considerarse que la densidad permanezca constante, pero sí tienen una ecuación de estado que en el caso de un gas ideal es:

$$\frac{P}{\rho} = RT \quad (2.25)$$

Se puede trabajar con la ecuación de estado y la ecuación (2.22). Además, se tiene la ecuación de evolución, que expresa la transformación que sufren algunos gases en función de su comportamiento. Así, para el caso en el que la temperatura permanezca constante durante la transformación (transformación isoterma), la ecuación de evolución viene dada por:

$$T = \text{cte} \quad \rightarrow \quad \frac{P}{\rho} = \text{cte} \quad (2.26)$$

En los procesos adiabáticos, la ecuación de la evolución cumple que:

$$PV^k = \text{cte} \quad (2.27)$$

Como ejemplo baste decir que la estratosfera tiene un comportamiento isoterma, mientras que la troposfera es un proceso adiabático con  $k = 1,4$ .

### Ejemplo

#### Actuación conjunta de dos campos equipotenciales

Supongamos un cilindro con su eje vertical, que se encuentra rotando a velocidad angular  $\omega$  constante. El cilindro se encuentra lleno de agua hasta una determinada altura.

Primero, podemos considerar la ecuación general de la hidrostática ya que las partículas de fluido no sufren movimiento relativo entre ellas.

Sobre el líquido se encuentran actuando dos campos potenciales, uno debido a la gravedad  $\psi_1 = gh$ , que ya se ha visto en la sección 2.3.1, y otro perpendicular a este debido a la fuerza centrífuga que actúa sobre la partícula de agua. Esta viene dada por la expresión:

$$F_c = m\omega^2 r = mA_c \quad (2.28)$$

donde  $A_c = \omega^2 r$  es la aceleración centrífuga. Esta aceleración puede expresarse en función de un campo potencial dependiente de  $r$ :

$$A_c = -\frac{\partial\psi_2}{\partial r} \quad (2.29)$$

Integrando esta expresión se llega a:

$$\psi_2 = -\int A_c dr = -\int \omega^2 r dr = -\frac{\omega^2 r^2}{2} \quad (2.30)$$

Sumando ambos campos potenciales:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = gh - \frac{\omega^2 r^2}{2} \tag{2.31}$$

A continuación vamos a representar las líneas equipotenciales, que como ya se ha demostrado en la sección 2.3.1 son coincidentes con las isobaras. Para ello, buscamos una forma de la ecuación en la que podamos separar los términos en  $r$  de los términos en  $h$  (direcciones de cada uno de los campos potenciales), resultando:

$$h = \frac{\psi}{g} + \frac{\omega^2}{2g} r^2 \tag{2.32}$$

expresión correspondiente a la parábola de segundo grado mostrada en la figura 2.5

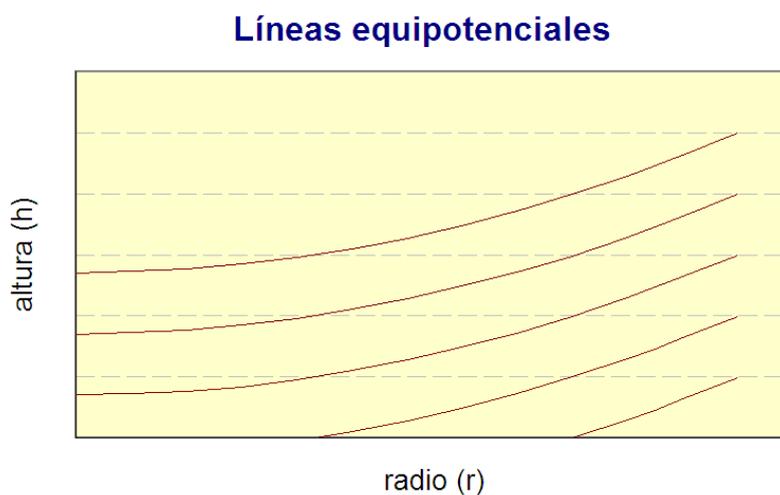


Figura 2.5: Isobaras o equipotenciales de un cilindro girando con velocidad constante



**Ejemplo**

Presión en la base de un cilindro girando

Un cilindro hueco de 6 *cm* de diámetro y 10 *cm* de profundidad con paredes indeformables, está lleno de agua hasta 3 *cm* del borde. Calcule la velocidad angular de giro  $\omega$  a la que el agua llena justo el borde del cilindro, y la presión en un punto junto al contorno de la base.

Utilizando los campos potenciales deducidos en el ejemplo anterior, se tiene:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = gh - \frac{\omega^2 r^2}{2} \tag{2.33}$$

Al girar, la altura ( $h = 0.10 \text{ m}$ ), se alcanza en el borde ( $r = 0.03 \text{ m}$ ), por lo que:

$$\psi = 9.81 \cdot 0.10 - \frac{\omega^2 0.03^2}{2} \tag{2.34}$$

La segunda de las ecuaciones se obtiene de plantear la conservación de la masa, que es coincidente con la conservación del volumen al considerar líquido incompresible ( $\rho = cte$ ). Si tenemos en cuenta el volumen ocupado por el agua cuando el cilindro esta parado ( $h_0 = 0.10 - 0.03 = 0.07$ ), e integramos la ecuación de la parábola que representa la superficie libre cuando el cilindro esta rotando ( $h = \frac{\psi}{g} + \frac{\omega^2}{2g}r^2$ ), se tiene:

$$\pi r^2 h_0 = \int_r \int_\theta \left( \frac{\psi}{g} + \frac{\omega^2}{2g} r^2 \right) r \, d\theta \, dr \quad (2.35)$$

Integrando:

$$\pi r^2 h_0 = 2\pi \frac{\psi}{g} \frac{r^2}{2} + 2\pi \frac{\omega^2}{2g} \frac{r^4}{4} \quad \rightarrow \quad h_0 = \frac{\psi}{g} + \frac{\omega^2}{4g} r^2 \quad (2.36)$$

Despejando el valor del potencial en el punto conocido del borde:

$$\psi = gh_0 - \frac{\omega^2 r^2}{4} = 9.81 \cdot 0.07 - \frac{\omega^2 0.03^2}{4} \quad (2.37)$$

Igualando las ecuaciones (2.34) y (2.37) se llega a:

$$g \frac{0.10 - 0.07}{0.03^2} = \omega^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \quad \rightarrow \quad \omega^2 = \frac{4g}{0.03} = 133.33g \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{1308} = 36.16 \text{ r.p.s} \quad (2.38)$$

Para conocer la presión utilizamos la ecuación general de la hidrostática cuando las fuerzas actuantes se derivan del potencial (2.18):

$$\rho d\psi + dP = 0 \quad (2.39)$$

El incremento de potencial entre la equipotencial ( $\psi_0$ ) que pasa por la unión de las paredes del recipiente con su base ( $h = 0$  y  $r = 0.03$ ) y la equipotencial ( $\psi_{sup}$ ) que pasa por la superficie libre ( $p = 0$ ,  $h = 0.10$  y  $r = 0.03$ ), permite calcular el incremento de presión que se produce en ese punto respecto de la superficie libre.

$$h = 0 \text{ y } r = 0.03 \quad \rightarrow \quad \psi_0 = gh_{fondo} - \frac{\omega^2 r^2}{2} = 0.00g - \frac{133.33g \cdot 0.03^2}{2} \quad (2.40)$$

$$h = 0.10 \text{ y } r = 0.03 \quad \rightarrow \quad \psi_{sup} = gh_{borde} - \frac{\omega^2 r^2}{2} = 0.10g - \frac{133.33g \cdot 0.03^2}{2} \quad (2.41)$$

Por tanto:

$$\Delta\psi = \psi_0 - \psi_{sup} = -0.10g \quad \rightarrow \quad \Delta P = -\rho\Delta\psi = 0.10\rho g = 0.10\gamma \quad (2.42)$$

Lo que equivale a la altura manométrica desde el fondo a la superficie libre en el punto del contorno.



## 2.4 Presiones absolutas y relativas

La presión absoluta es un valor de la presión que contempla la suma de totalidad de las presiones que actúan en un determinado punto. Es por tanto un valor que nunca será negativo.

Partiendo de la ecuación general de los gases:

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad (2.43)$$

y sabiendo que  $n \cdot R$  es constante, se llega a que:

$$\frac{P \cdot V}{T} = \frac{P' \cdot V'}{T'} \quad (2.44)$$

Una presión ( $P'$ ) igual a cero significa que la temperatura del estado ( $T'$ ) debe ser también igual a cero, ya que no puede serlo el volumen.

$$P' = \frac{P \cdot V \cdot T'}{V' \cdot T} = 0 \quad \rightarrow \quad T' = 0 \quad (2.45)$$

En esta ecuación es muy importante tener en cuenta el hecho de que las temperaturas son temperaturas absolutas, y por tanto, se expresan en grados Kelvin.

Habitualmente, y sobre todo en el caso de líquidos, se trabaja con el concepto de presión relativa, siendo ésta la variación de presión medida en el interior del fluido desde la superficie libre. Es decir la presión a la profundidad a la que se realiza la medida teniendo en cuenta que el aparato de medida toma como presión cero la correspondiente a la presión atmosférica ( $P_{atm}$ ) en un punto de la superficie del líquido pero fuera de éste. Este es el caso de los manómetros en tuberías o los utilizados por los submarinistas para conocer la profundidad de inmersión.

En este caso existe una relación entre la presión absoluta ( $P_{abs}$ ) y la relativa ( $P_{rel}$ ) dada por la ecuación:

$$P_{abs} = P_{rel} + P_{atm} \quad (2.46)$$

En el caso de considerar presiones relativas, sí pueden obtenerse valores negativos de la presión, basta con hacer el vacío en un recipiente donde el aire se encuentra encerrado a presión atmosférica.

La presión atmosférica equivale a  $101325 \text{ N/m}^2$  (Pascuales).

Otra forma de expresar la presión habitualmente utilizada cuando trabajamos con fluidos, y especialmente con líquidos, es en metros de columna de líquido equivalente. Esta altura es el resultado de dividir la expresión (2.47) entre el peso específico del líquido. En el caso particular del agua, se habla de metros de columna de agua (m.c.a.), utilizándose para ello el valor del peso específico del agua ( $\gamma$ ). A modo de ejemplo una presión absoluta expresada en m.c.a. resulta:

$$\frac{P_{abs}}{\gamma} = \frac{P_{rel}}{\gamma} + \frac{P_{atm}}{\gamma} \quad (2.47)$$

En este caso el término  $\frac{P_{rel}}{\gamma}$  se corresponde con la profundidad ( $d$ ), en metros, a la que medimos la presión en el interior del fluido.

La altura de presión atmosférica en el caso del agua equivale a:

$$h_{atm} = \frac{P_{atm}}{\gamma} = \frac{101325 \text{ N/m}^2}{9810 \text{ m/s}^2} = 10.33 \text{ m.c.a.} \quad (2.48)$$

Un ejemplo de nuestra vida habitual en el que estamos acostumbrados a medir presiones mediante alturas de fluido equivalente es el barómetro de mercurio donde los 760 mm de altura de columna de mercurio equivalen a 1 atmósfera:

$$\frac{P_{atm}}{\gamma_{Hg}} = \frac{101325}{13579 \cdot 9.81} = 0.760 \text{ m.c.Hg.} = 760 \text{ mm}_{Hg} \quad (2.49)$$

#### Nota

Esta forma habitual de medir presiones manométricas también se utiliza para obtener la altura de impulsión de un sistema de bombeo. Hay que tener en cuenta que es dependiente del valor de la gravedad en el punto de medida ( $\gamma = \rho \cdot g$ ), lo que muchas veces tiende a olvidarse. Por ejemplo, en la luna, un sistema de bombeo especificado con este estándar, o un manómetro terrestre, tienen que ser adecuadamente transformados a las condiciones de gravedad de nuestro satélite.

Cuando hablamos únicamente de presiones relativas en fluidos incompresibles ( $\rho = cte$ ) sometidos al campo gravitatorio (ecuación (2.24)), se tiene que en un punto cualquiera del fluido situado a una profundidad  $d$  de la superficie del mismo se cumple:

$$h + \frac{P}{\gamma} = h + d = cte \quad (2.50)$$

siendo  $h$  la altura del punto desde una superficie de referencia. Hay que tener en cuenta que el sentido positivo de  $h$  es en sentido vertical creciente, mientras que la profundidad  $d$  crece en el sentido negativo del mismo.

Esto es lo que conocemos como **altura piezométrica**.

## 2.5 Empujes sobre superficies planas

El empuje de las presiones sobre una superficie plana siempre se puede realizar dibujando el diagrama de presiones perpendicular a la misma y procediendo a su integración, obteniéndose así el valor del empuje y su punto de aplicación.

En el presente apartado se justifica matemáticamente un sistema que permite la obtención del empuje sobre una superficie plana mediante:

$$E = \gamma d_{cdg} S \quad (2.51)$$

siendo:

$\gamma$	Peso específico del fluido	$(N/m^3)$
$d_{cdg}$	Profundidad vertical a la que se encuentra el centro de gravedad de la superficie sumergida sobre la que actúan los empujes	$(m)$
$S$	Superficie a integrar sobre la que actúan los empujes	$(m^2)$

En cualquier caso el primer paso es siempre dibujar el diagrama de empujes tanto para evitar posibles fallos como por la claridad que representan a la hora de comprender el problema que se resuelve.

Supongamos la superficie abatida  $S$  contenida en el plano A-B perpendicular al plano del dibujo, e inclinado un ángulo  $\alpha$  respecto de la vertical.

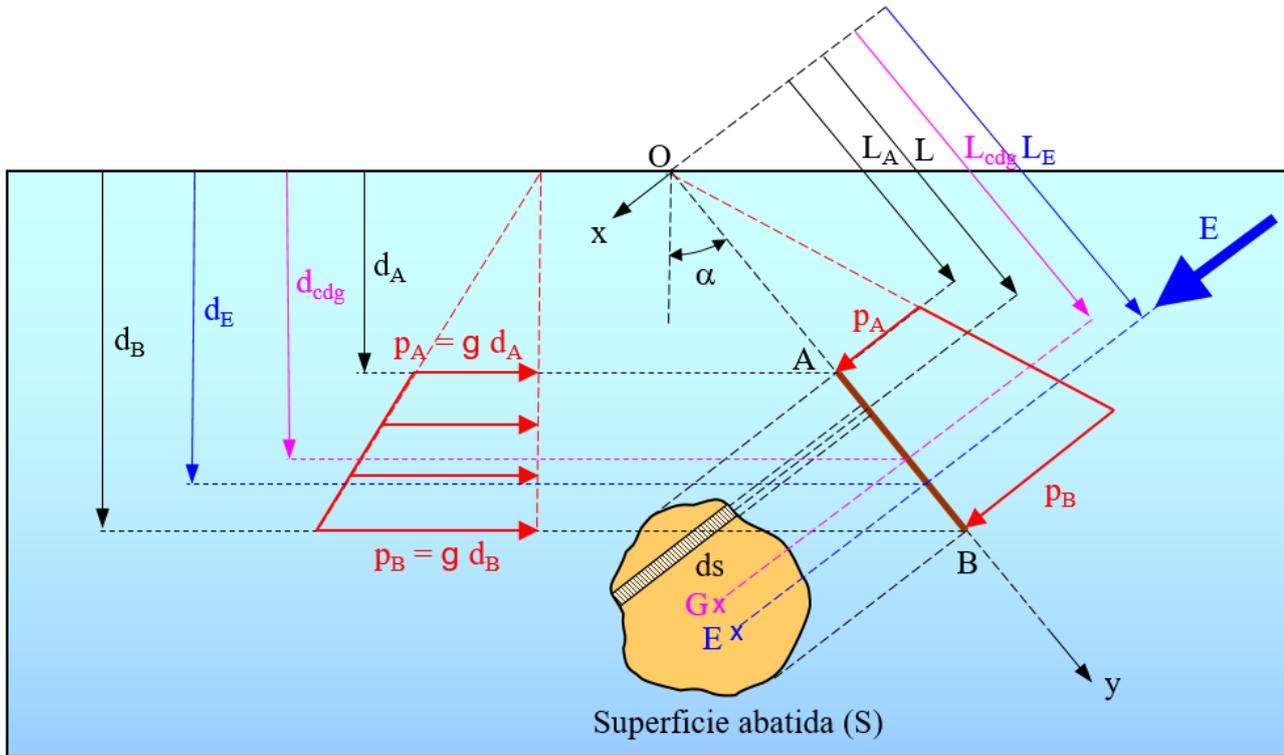


Figura 2.6: Empujes sobre una superficie plana

El punto de mínimo empuje (A), tiene una presión  $P_A = \gamma d_A$ , mientras que al punto de máxima presión (B) le corresponderá una presión de  $P_B = \gamma d_B$ , siendo  $d_A$  y  $d_B$  las profundidades de los puntos A y B respectivamente, con  $d_B > d_A$ .

Sean  $L_A$  y  $L_B$  las distancias medidas sobre el plano que contiene a la superficie de los puntos A y B, medidos desde el corte de ese plano con la superficie libre (O).

Si denominamos  $p = \gamma d$  a la presión que se aplica al diferencial de superficie ( $ds$ ) con profundidad  $d$  constante, se tiene que el empuje sobre la totalidad de la superficie viene dado por:

$$E = \int_S p ds = \gamma \int_S d ds = \gamma \int_S L \cos \alpha ds = \gamma \cos \alpha \int_S L ds \quad (2.52)$$

siendo  $L$  la distancia a la que se encuentra el diferencial de superficie  $ds$  medida sobre el plano de la superficie y tomando como origen el punto O.

Analizando el término  $\int_S L ds$  se observa que es el momento de primer orden o momento estático de la superficie  $S$  respecto del eje perpendicular al plano del dibujo que pasa por el punto O. Por

tanto, puede expresarse como:

$$\int_S L ds = L_{cdg} S \quad (2.53)$$

siendo:

$L_{cdg}$  Distancia, sobre el plano que contiene a la superficie, del centro de gravedad de la misma medida respecto del eje que pasa por el punto O (m)

Sustituyendo en la ecuación (2.52), se tiene:

$$E = \gamma \cos \alpha \int_s L ds = \gamma \cos \alpha L_{cdg} S = \gamma d_{cdg} S = P_{cdg} S \quad (2.54)$$

Por tanto, se puede afirmar que *'el empuje sobre una superficie plana sumergida en un fluido incompresible por efecto de las presiones relativas equivale al valor de la presión en el centro de gravedad de la sección multiplicada por el área de la misma.'*

### 2.5.1 Obtención de la resultante del empuje sobre superficies planas

La formulación anterior facilita el cálculo de la resultante del empuje pero no su ubicación, lo que tiene importancia a la hora de determinar los momentos actuantes sobre la superficie.

Tomando momentos respecto del eje perpendicular al plano del dibujo que pasa por O mostrado en la figura 2.6, se tiene:

$$M_o = E \cdot L_e = \int_S p L ds = \gamma \cos \alpha \int_s L^2 ds = \gamma \cos \alpha I_{O_x} \quad (2.55)$$

siendo:

$L_e$  Distancia, sobre el plano que contiene a la superficie, del punto de aplicación de la resultantes de empujes medida respecto del eje que pasa por el punto O (m)

$I_{O_x}$  Momento de inercia de la superficie  $S$  respecto del eje perpendicular al dibujo que pasa por el punto O (m<sup>4</sup>)

Despejando  $L_e$  en la ecuación anterior, y sustituyendo el valor del empuje obtenido de la ecuación (2.54) se llega a:

$$L_e = \frac{\gamma \cos \alpha I_{O_x}}{\gamma \cos \alpha L_{cdg} S} = \frac{I_{O_x}}{L_{cdg} S} \quad (2.56)$$

Teniendo en cuenta el teorema de Steiner para obtener la inercia en el eje O respecto de la inercia que pasa por el centro de gravedad de la sección ( $I_{cdg}$ ), se tiene que:

$$L_e = \frac{I_{cdg} + L_{cdg}^2 S}{L_{cdg} S} = L_{cdg} + \frac{I_{cdg}}{L_{cdg} S} \quad (2.57)$$

## Nota

Para la aplicación de esta fórmula es necesario trabajar con presiones relativas, y con el punto O situado en el contacto del plano que contiene a la superficie con la superficie libre. En caso contrario no puede calcularse el momento como  $M = E \cdot L_e$

El problema es cuando la superficie no es simétrica respecto de la línea A-B porque en ese caso habría que hacer la integración respecto de un eje paralelo a A-B para conocer la situación de la resultante de empujes medida en la dirección perpendicular al plano del dibujo.

## EJERCICIO 1

La compuerta rectangular de la figura tiene un ancho  $b = 2.0 \text{ m}$  y esta sumergida desde la profundidad  $d_a = 1.2 \text{ m}$  a la  $d_b = 3.2 \text{ m}$ . El peso específico del fluido en el depósito es  $\gamma = 9810 \text{ N/m}^3$

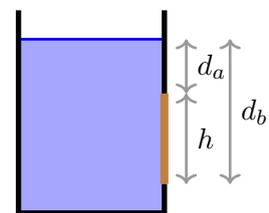
Test.

1. Calcular la fuerza resultante debido al empuje del agua

N

2. Calcular su posición desde la superficie

m

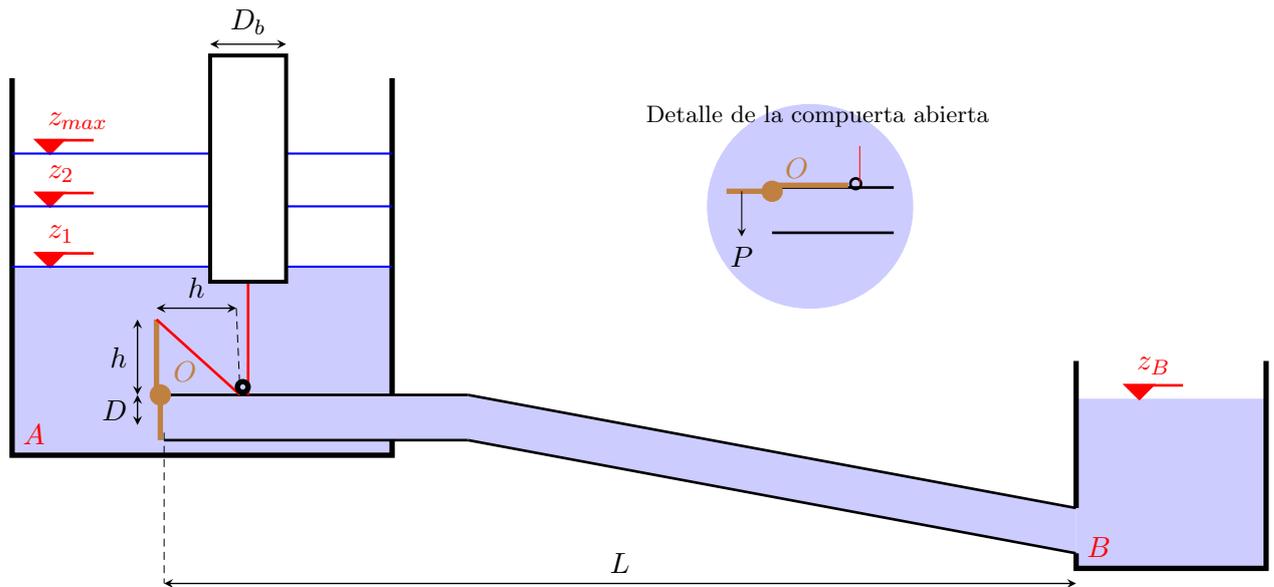


Pulsar sobre la palabra [ejercicio 1](#) al comienzo para ver la solución

A continuación se propone la parte del ejercicio de examen de la convocatoria de julio de 2013 referente a temas de presión.

## EJERCICIO 2

Los depósitos A y B están unidos por una tubería de diámetro  $D = 0.3 \text{ m}$ , rugosidad  $\varepsilon = 0.5 \text{ mm}$  y longitud  $L = 300 \text{ m}$ . El depósito B tiene el nivel constante a la cota  $z_B = 3 \text{ m}$ . El depósito A tiene un nivel variable pero no se quiere que supere la cota  $z_{max} = 8 \text{ m}$ . Con objeto de controlar el nivel de este depósito se dispone una compuerta que puede cerrar herméticamente en el extremo del depósito A de la tubería. Esta compuerta rota alrededor del punto O situado en el extremo alto de la tubería a la cota  $z_t = 3 \text{ m}$ . La compuerta se encuentra regulada por el mecanismo de boya cilíndrica de diámetro  $D_b$  mostrado en el esquema. El cable que une el brazo de longitud  $h = 0.6 \text{ m}$  de la compuerta es de peso y elongación despreciables y comienza a tensarse cuando el nivel del depósito esta en  $z_1 = 5 \text{ m}$ .



### Test.

1. Calcular el empuje  $E_h$  sobre la compuerta al llegar el agua a la cota máxima  $z_{max}$ . Suponer el espesor de la tubería despreciable. N
  
2. Calcular el diámetro necesario de la boya  $D_b$  para que se abra la compuerta en el caso anterior. m
  
3. Calcular el peso sumergido  $P$  de la compuerta para que esta comience a cerrarse, desde su posición de máxima apertura, cuando el nivel en A es  $z_2 = 6 \text{ m}$ . Desprecie el peso del brazo de la compuerta y las fuerzas hidrodinámicas que afectan a la compuerta (solo se pide el comienzo por ser el proceso de cierre un problema altamente complejo). N
  
4. Calcular la fuerza en el cable  $F_2$  en ese instante. N
  
5. Se quiere reducir la cota máxima de A variando la cota de B. ¿Habrá que [reducir] o [aumentar] esta cota?. Escribir la palabra entre corchetes.

Pulsar sobre la palabra **ejercicio 2** al comienzo para ver la solución

---

## 2.6 Empuje sobre superficies curvas

Igual que en el caso anterior, la resultante del empuje puede obtenerse mediante integración directa, lo que en algunos casos puede incluso simplificar el problema, pero en otros la aplicación del Método de Poincaré que a continuación se enuncia simplificará el problema.

### 2.6.1 Método de Poincaré

Este método se podría enunciar como *'El empuje resultante en una dirección de la presión aplicada a cualquier superficie es igual al empuje debido la presión sobre la proyección de dicha superficie sobre un plano perpendicular a la dirección en la que se quiere conocer el empuje más la variación de presión según dicha dirección desde el plano de proyección hasta la superficie'*

Supongamos la superficie curva de la figura 2.7, sobre la que se toma el  $dl$  mostrado.

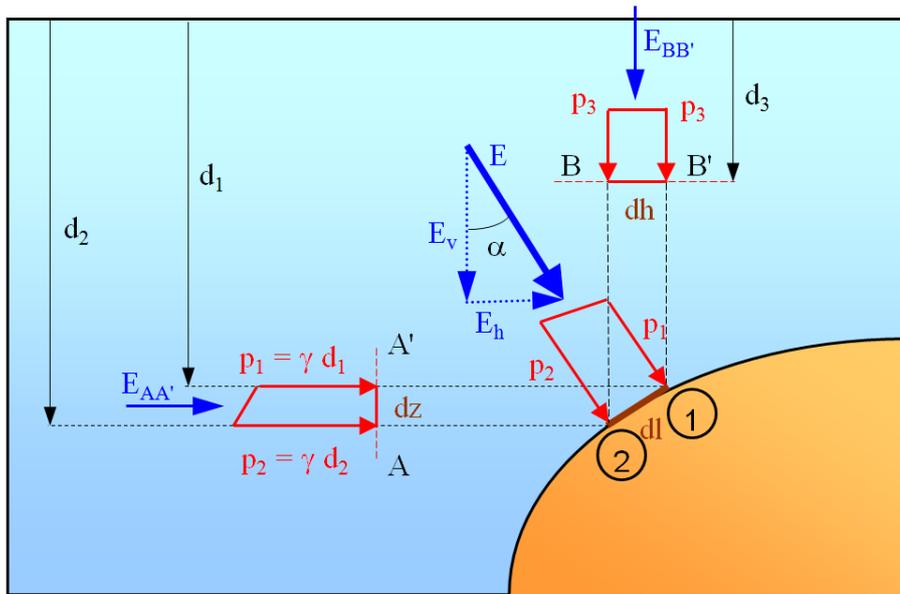


Figura 2.7: Empujes sobre superficie curva. Método de Poincaré

A continuación va a estudiarse la resultante de empujes ( $E$ ) sobre ese elemento  $dl$  y los empujes horizontales sobre la proyección del  $dl$  en la línea vertical AA'.

$$E = \frac{p_1 + p_2}{2} dl \tag{2.58}$$

siendo:

- $p_1$  Presión a la profundidad  $d_1$  ( $N/m^2$ )
- $p_2$  Presión a la profundidad  $d_2$  ( $N/m^2$ )

Las componentes horizontal y vertical de este empuje son respectivamente:

$$E_h = E \operatorname{sen} \alpha \quad E_v = E \operatorname{cos} \alpha \tag{2.59}$$

En la longitud  $dz$  correspondiente a la proyección de  $dl$  sobre la línea vertical AA' el empuje resulta:

$$E_{AA'} = \frac{p_1 + p_2}{2} dz \tag{2.60}$$

Si expresamos el  $dz$  en función del  $dl$  y el ángulo  $\alpha$  de inclinación de esta línea con la vertical, se tiene:

$$dz = dl \operatorname{cos} \alpha \tag{2.61}$$

Sustituyendo  $dz$  en la ecuación (2.60), vemos que coincide con el valor de  $E_h$  dado en la expresión (2.59). Por tanto:

$$E_{AA'} = E_h \tag{2.62}$$

Si extendemos este cálculo, que es independiente del ángulo  $\alpha$  del elemento  $dl$ , a toda la línea curva, entonces resulta que la resultante de empujes horizontales sobre la línea curva tiene el mismo valor que la resultante sobre la proyección en un plano vertical cualquiera de las presiones actuantes en función de la profundidad.

**Nota**

Hay que tener en cuenta que este cálculo se ha realizado en un fluido donde la única fuerza másica actuante es la correspondiente a la gravedad. En este caso, la única variación de la presión es debida a la profundidad (ver sección 2.3.1). En el caso de existir aceleraciones en otro eje que no sea el vertical, habría que tener en cuenta la variación de presión en ese eje.

Cuando se estudia el empuje vertical hay que considerar la presión sobre la proyección de la curva  $dl$  en  $BB'$  más la variación de la presión con la profundidad que hay desde el plano de referencia ( $BB'$ ) hasta la superficie (1-2).

$$E_v = E_{BB'} + \frac{E_{B'1} + E_{B2}}{2} dh = p_3 dh + \frac{(p_1 - p_3) + (p_2 - p_3)}{2} dh = \frac{p_1 + p_2}{2} dh = \gamma \frac{d_1 + d_2}{2} dh \tag{2.63}$$

En realidad, independientemente del plano de referencia horizontal utilizado, las presiones verticales, cuando la única fuerza actuante es la gravedad, se corresponden con el área encerrada entre el sólido y la superficie libre multiplicada por el peso específico ( $\gamma$ ).

**Nota**

Todo el razonamiento anterior se ha realizado sobre las líneas  $dl$ ,  $dz$  y  $dh$ , cuando en realidad éstas serán áreas que se proyectan en las superficies  $AA'$  y  $BB'$ . Entre ambas se formará un volumen cilíndrico.

Este razonamiento es válido para la proyección sobre cualquier plano, siempre que mantengamos las presiones ( $p_1$  y  $p_2$ ) que actúan a ambos lados del elemento  $dl$ .

Toda la justificación anterior es igualmente válida cuando en vez de tomar elementos diferenciales de longitud  $dl$ , utilizamos elementos diferenciales de área  $dA$ , con lo que se puede extender la formulación a empujes sobre volúmenes sólidos.

En realidad, todo este comportamiento concuerda con la deducción del tensor de tensiones esférico realizado en la sección 2.2 más la variación del valor escalar de la presión debido a la actuación del campo gravitatorio en líquidos incompresibles.

## 2.7 Flotación

### 2.7.1 Equilibrio del sólido sumergido. Empuje de Arquímedes

Arquímedes (287 al 212 A.C.) estudió el problema de la flotación de los empujes en sólidos sumergidos, enunciando el siguiente principio.

*'El empuje vertical ascendente de un cuerpo sumergido en un fluido es igual al peso del volumen del líquido desalojado'*

Físicamente estamos acostumbrados a observar sólidos que cuando son sumergidos en agua se hunden, mientras que otros ascienden a la superficie hasta alcanzar su posición de equilibrio a flote. El principio de Arquímedes lo que enuncia es que los volúmenes sólidos con una densidad media mayor que la del fluido en el que se sumergen se hunden, mientras que los que ascienden tendrán una densidad media menor que la del fluido. En caso de tener una densidad media igual a la del fluido en que se encuentra sumergido el equilibrio es indiferente y el sólido puede estar sumergido a cualquier profundidad sin experimentar movimiento alguno mientras no se le aplique una fuerza que modifique este estado de equilibrio.

Para demostrar este principio vamos a aplicar el Principio de Poincaré a los empujes horizontales y verticales sobre un sólido sumergido.

#### Empujes horizontales sobre un sólido sumergido

Estudiamos el esquema de presiones actuando sobre la superficie diferencial horizontal mostrada en la figura 2.8

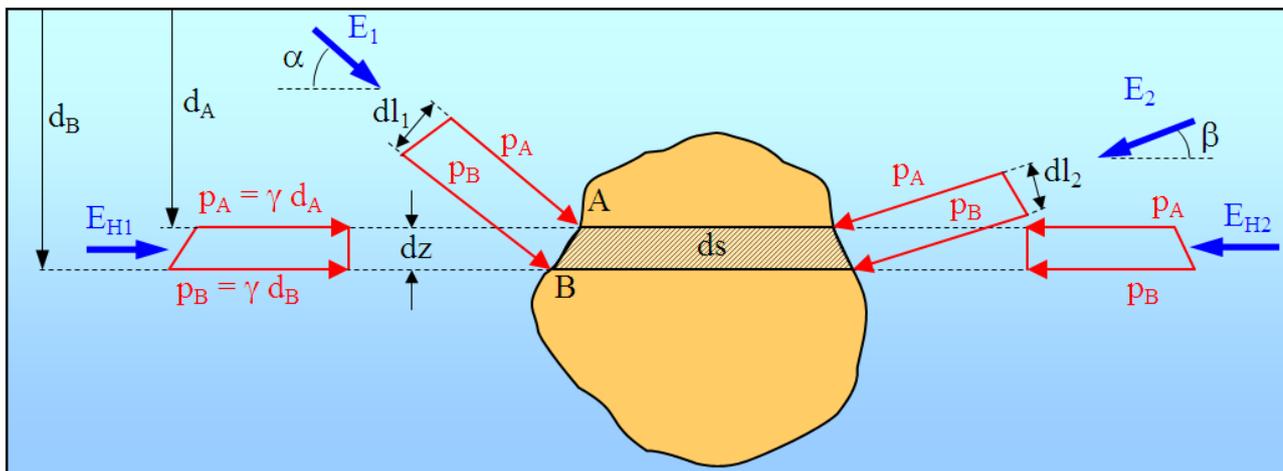


Figura 2.8: Empujes horizontales sobre un sólido sumergido

Si  $E_1$  y  $E_2$  son las resultantes de empujes sobre los elementos de longitud  $dl_1$  y  $dl_2$  respectivamente, dados por:

$$E_1 = \frac{p_A + p_B}{2} dl_1 \quad E_2 = \frac{p_A + p_B}{2} dl_2 \quad (2.64)$$

siendo:

$p_A$	Presión a la profundidad $d_A$	$(N/m^2)$
$p_B$	Presión a la profundidad $d_B$	$(N/m^2)$

Las componentes horizontales del empuje son respectivamente:

$$E_{H1} = E_1 \cos \alpha \qquad E_{H2} = E_2 \cos \beta \qquad (2.65)$$

Si aplicamos el Principio de Poincaré a ambos empujes horizontales se cumple que:

$$E_H = \frac{p_A + p_B}{2} dz = E_{H1} = E_{H2} \qquad (2.66)$$

siendo:

$dz$  Diferencial de profundidad en el que se extienden los diferenciales de superficie  $dl_A$  y  $dl_B$   $(m)$

Aplicando  $dz = dl_1 \cos \alpha = dl_2 \cos \beta$  se hubiera llegado a la misma solución.

Este razonamiento puede aplicarse igualmente a un volumen, solo que su representación gráfica es más compleja. En cualquier caso, se puede ver que ha de cumplirse para cada rebanada diferencial de superficie tomada en el plano paralelo al del dibujo.

Como implicación de la afirmación anterior, se deduce que la resultante de empujes horizontales sobre un cuerpo sumergido, sin aceleración en este eje, es nula independiente de la profundidad a la que se encuentre. Hay que tener en cuenta que esto no significa que las presiones sean nulas, sino solamente su resultante, ya que las presiones a grandes profundidades son muy importantes y podrían, por ejemplo, romper el casco de un submarino.

### Empujes verticales sobre un sólido sumergido

Vamos a realizar un razonamiento similar al del apartado anterior para determinar la resultantes de empujes verticales sobre un sólido sumergido.

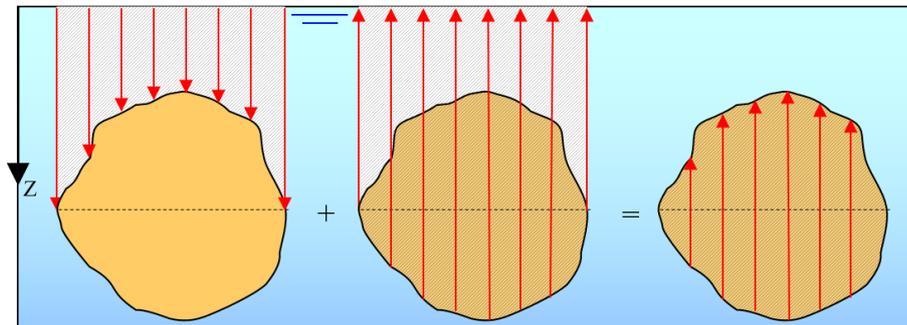


Figura 2.9: Empujes verticales sobre un sólido sumergido

A la izquierda de la figura 2.9 están representados los empujes verticales sobre la parte superior del sólido sumergido, cuya resultante tiene la dirección del eje  $Z$  negativo, mientras que en el centro

se tienen los empujes verticales sobre la parte inferior del sólido. Estos últimos tienen la dirección positiva del eje  $Z$ . En ambos casos se ha utilizado el método de Poincaré para determinar el valor de la componente vertical del empuje, utilizando como línea de referencia la correspondiente a la superficie libre. Dado que el empuje en un punto tiene el valor de la profundidad en el punto multiplicada por el peso específico del líquido en que se encuentra sumergido, y éste último es factor común a todos ellos, en la representación se ha utilizado el valor de la profundidad como la escala de representación de empujes.

Por tanto, el empuje vertical hacia abajo sobre la parte superior del sólido sumergido (figura 2.9 izquierda) equivale al área rallada multiplicada por el peso específico del líquido en que se sumerge ( $\gamma$ ), y el empuje vertical hacia arriba sobre la parte inferior del sólido sumergido (figura 2.9 centro) equivale al área rallada multiplicada por el peso específico del líquido en que se sumerge ( $\gamma$ ).

De la suma de ambos empujes (figura 2.9 derecha) resulta el área del sólido sumergido multiplicada por el peso específico del líquido, lo que se corresponde con el empuje ascendente de Arquímedes, cuando en vez de trabajar en dos dimensiones (áreas en papel) lo hacemos con volúmenes siguiendo el mismo razonamiento.

Otra forma alternativa de ver el mismo problema es bajo el siguiente prisma:

- Hay sólidos que cuando se sumergen en un líquido se hunden hasta el fondo independientemente de lo alejado que éste pueda estar.
- Hay sólidos que cuando se sumergen en un líquido ascienden hasta la superficie donde se quedan flotando.
- En la hidrostática no hay movimiento relativo de las partículas, por lo tanto, si se encierra un determinado volumen de partículas dentro de un volumen, éstas están en equilibrio con las adyacentes, sin ascender o hundirse. En este caso, el peso del volumen encerrado debe ser igual al empuje de Arquímedes, o el desequilibrio entre el peso y el empuje produciría un movimiento. Esto puede escribirse como:

$$E_a = \gamma V \quad (2.67)$$

Siendo  $V$  el volumen de partículas encerradas del líquido dentro de nuestro volumen, y  $\gamma$  el peso específico de las partículas en ese volumen, que coincide con las del líquido en las que están sumergidas.

## 2.7.2 Tensión efectiva

La tensión efectiva es el diagrama de tensiones que transmite el sólido sumergido al fondo sobre el que se apoya.

Supongamos el sólido representado en la figura 2.10 izquierda

La presión transmitida por la columna de agua de peso específico  $\gamma_a$  sobre el fondo en un punto

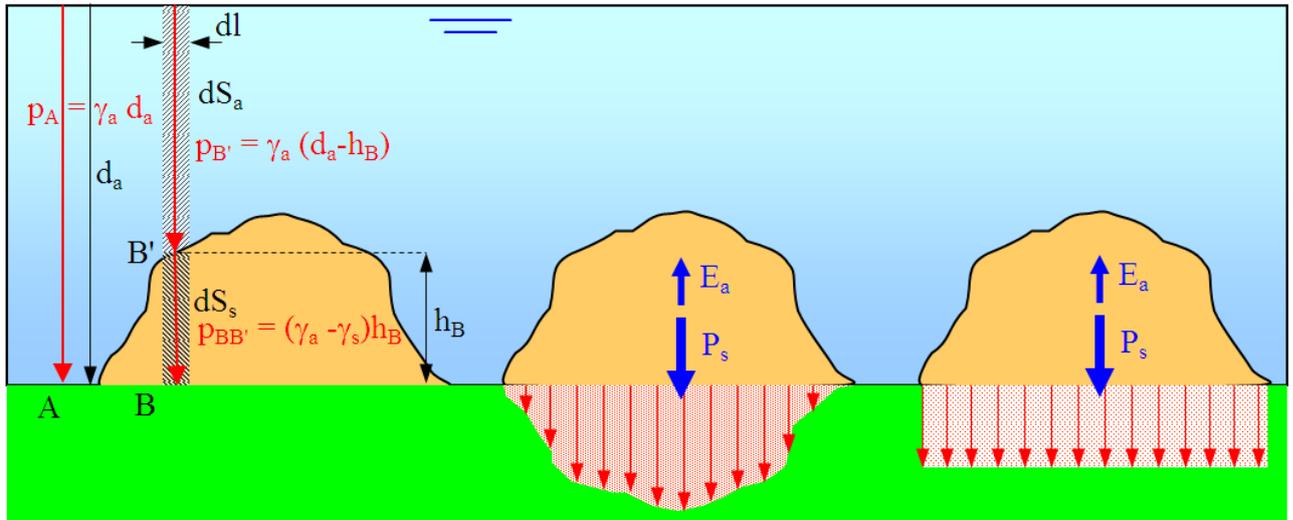


Figura 2.10: Tensiones efectivas transmitidas por un sólido apoyado en el fondo

donde no está el sólido (punto A), a una profundidad  $d_A$ , es:

$$P_A = \gamma_a d_A \tag{2.68}$$

El valor de la presión transmitida al punto B, situado bajo el sólido, será la correspondiente al peso de la columna de agua de área  $dS_a$  en B' más el peso del diferencial de superficie ( $dS_s$ ) del plano.

La presión se determina por el peso de los diferenciales de área dividido por el diferencial de longitud ( $dl$ ) sobre el que actúa. Por tanto, la presión en B es:

$$P_B = \frac{dS_a \gamma_a + dS_s \gamma_s}{dl} \tag{2.69}$$

siendo:

- $\gamma_a$  Peso específico del líquido ( $N/m^3$ )
- $\gamma_s$  Peso específico del sólido ( $N/m^3$ )

El primer sumando de la ecuación (2.69) puede ponerse como el peso de la columna de agua hasta el fondo menos el peso de la columna de agua del punto B a B', resultando:

$$P_B = \frac{(dS_a + dS_s)\gamma_a - dS_s \gamma_a + dS_s \gamma_s}{dl} = d_A \gamma_a - h_b \gamma_a + h_b \gamma_s \tag{2.70}$$

El primer termino de la ecuación (2.70) coincide con la ecuación (2.68), el segundo es el empuje de Arquímedes y el tercero es el peso del sólido. La diferencia entre las ecuaciones (2.68) y (2.70) es la tensión efectiva añadida por la existencia del sólido, y se corresponde con el peso del sólido sumergido (peso del sólido menos empuje de Arquímedes)

$$\sigma_{efec} = h_b (\gamma_s - \gamma_a) \tag{2.71}$$

En principio podríamos suponer una presión efectiva como la mostrada en la figura 2.10 centro, lo que ocurre es que en el interior del sólido rígido existe redistribución de tensiones, que depende también de los módulos de elasticidad relativos entre el sólido sumergido y el fondo sobre el que se apoya, pudiendo tener un esquema simplificado como el que se muestra en la figura 2.10 derecha, pero que escapa del alcance de la hidráulica.

Ambos diagramas de tensiones efectivas tienen el mismo valor integrado de las tensiones ( $V$ ) e iguales al peso total del sólido sumergido (peso total del sólido ( $P_s$ ) menos el empuje de Arquímedes ( $E_a$ )).

$$V = P_s - E_a \quad (2.72)$$

En la realidad se tendría un diagrama de tensiones entre los mostrados en la figura 2.10 en el centro y la derecha.

### 2.7.3 Subpresión

A continuación vamos a suponer que entre el sólido sumergido y el fondo penetra el fluido. Las partículas que se encuentran en la separación entre ambos tienen una presión equivalente a la columna de agua que tienen encima ( $P_a = \gamma_a d_A$ ). Esta presión se ejerce con sentido ascendente sobre la parte inferior del sólido sumergido, que es lo que se denomina **subpresión**, y hacia abajo sobre el fondo, coincidiendo con la presión que se ejerce sobre el punto A en la figura 2.10 izquierda. Por tanto, la suma de presiones que tenemos por encima de este punto coincidirá con la tensión efectiva.

Si se realiza este cálculo, se tiene la columna de agua actuando por encima del sólido, más el peso del sólido menos el empuje de agua hacia arriba en la parte inferior del sólido. Si sumamos el término primero de presión de agua sobre la parte superior del sólido más el empuje ascendente por debajo, se tiene como resultado el empuje de Arquímedes, con lo que las presiones efectivas coinciden con las obtenidas en la sección 2.7.2, exista, o no, agua por debajo.

Lo que realmente cambia la existencia de la subpresión es la fuerza necesaria para levantar el sólido sumergido.

- En el caso de existir subpresión, la fuerza necesaria para elevar el sólido mientras se encuentra totalmente sumergido se corresponde con el peso del sólido menos el empuje de Arquímedes.
- En el caso de no existir subpresión, la fuerza necesaria para levantar el sólido se corresponde con el peso del sólido más el peso de la columna de agua por encima del mismo. En este caso se realiza más fuerza cuanto más sumergido esté el sólido.

La realidad es que es muy difícil situar un sólido sobre un fondo sin que exista subpresión, ya que incluso en las obras cimentadas en seco sobre roca sana, como muchas presas, el agua, cuando se llena el embalse, penetra por los poros de la roca y la presa adoptan la presión deducida de la circulación de agua a través del medio en cada uno de los puntos. La circulación en este campo potencial se explica más detalladamente en el capítulo ?? del medio poroso.

En cualquier caso, un ejemplo se corresponde con el tapón de la bañera. Cuando está situado sobre el fondo de la misma sin estar en su agujero, la fuerza necesaria para elevarlo es muy pequeña, ya que existe subpresión. En el caso de estar correctamente colocado, por debajo de él hay aire con presión igual a la atmosférica, por tanto con presión relativa nula, y para levantarlo la fuerza necesaria se corresponde con la del caso anterior más el peso de toda la columna de agua que tiene por encima, por lo que si la bañera se encuentra llena hasta un nivel elevado, esta fuerza es muy grande comparada con el caso anterior.

En general, la subpresión es un fenómeno muy a tener en cuenta en el diseño ingenieril porque puede actuar muy del lado de la inseguridad, como en el caso de las presas, o el dimensionamiento de obras de amarre mediante boya con muerto en el fondo.

**Ejemplo**

Subpresión bajo una presa de gravedad.

Supongamos la presa de gravedad representada de forma esquemática en la figura 2.11, construida en hormigón de peso específico relativo  $\gamma_h = 2.35$ , y con un nivel de agua, aguas arriba de la presa de  $100\text{ m}$  y nulo aguas abajo. Se nos pide calcular la anchura  $L_A$  de la base para que la presa no deslice ni vuelque sobre el punto O, suponiendo un coeficiente de rozamiento entre la base de la presa y la cimentación de  $\rho = 0.7$

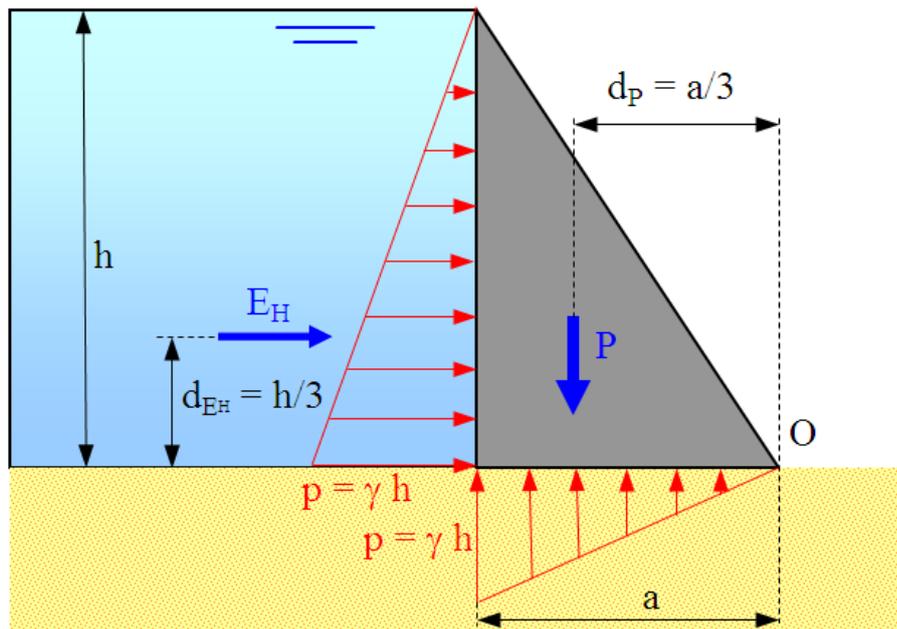


Figura 2.11: Representación esquemática de una presa de gravedad

El empuje horizontal del agua sobre el paramento aguas arriba es:

$$E_H = \frac{1}{2} \gamma h^2 = \frac{9810}{2} 100^2 = 49050000\text{ N} \tag{2.73}$$

y su brazo es  $d_{E_H} = \frac{h}{3} = 33.33\text{ m}$

El peso ( $P$ ) de la presa viene dado por:

$$P = \frac{1}{2} \gamma_h a h = \frac{9810 \cdot 2.35}{2} 100 a = 490500 \cdot 2.35 a = 1152675 a \quad (2.74)$$

y su brazo es  $d_P = \frac{2a}{3} = 0.667 a$  metros

Consideremos primero la solución sin subpresión.

- Coeficiente de seguridad a deslizamiento  $C_{sd} = 1$ :

$$C_{sd} = \frac{\rho E_v}{E_H} = \rho \frac{P}{E_H} = 0.7 \frac{490500 \cdot 2.35 a}{49050000} = 0.007 \cdot 2.35 a = 1.0 \quad \rightarrow \quad a = 60.79 m \quad (2.75)$$

- Coeficiente de seguridad a vuelco  $C_{sv} = 1$ :

$$C_{sv} = \frac{M_E}{M_v} = \frac{P d_P}{E_H d_{E_H}} = \frac{490500 \cdot 2.35 a \frac{2a}{3}}{49050000 \frac{100}{3}} = \frac{4.70}{10000} a^2 = 1.0 \quad \rightarrow \quad a = 46.13 m \quad (2.76)$$

Por tanto, el ancho de la base sería el mayor de ambos  $a = 60.79$  metros.

Cuando se considera el caso con subpresión, aparece el diagrama inferior de empujes mostrado en la figura 2.11 que disminuye el peso propio, resultando un nuevo valor del peso ( $P'$ ) dado por:

$$P' = \frac{1}{2} (\gamma_h - \gamma) a h = \frac{9810 (2.35 - 1.00)}{2} 100 a = 490500 \cdot 1.35 a = 662175 a \quad (2.77)$$

- Coeficiente de seguridad a deslizamiento  $C_{sd} = 1$ :

$$C_{sd} = \frac{\rho E_v}{E_H} = \rho \frac{P'}{E_H} = 0.007 \cdot 1.35 a = 1.0 \quad \rightarrow \quad a = 105.82 m \quad (2.78)$$

- Coeficiente de seguridad a vuelco  $C_{sv} = 1$ :

$$C_{sv} = \frac{M_E}{M_v} = \frac{P' d_P}{E_H d_{E_H}} = \frac{2.70}{10000} a^2 = 1.0 \quad \rightarrow \quad a = 60.86 m \quad (2.79)$$

En este caso el ancho de la base sería  $a = 105.82$  metros.

Evidentemente, el no tener en cuenta el efecto de la subpresión es claramente perjudicial para la estabilidad de la presa.

#### Nota

Se ha considerado que la subpresión lo que hace es disminuir el peso de la presa y por eso se le resta a éste. No se trata a la subpresión como un momento volcador, sino como un estabilizador negativo



#### Ejemplo

Fuerza necesaria para quitar un tapón.

Calcular la fuerza necesaria para quitar un tapón de bañera circular indeformable de radio  $r$ , espesor  $e$ , densidad  $\gamma_s$ , sumergido en el fondo de una bañera con altura de agua  $H$  en los dos casos siguientes.

- Esta apoyado en el fondo.
- Esta tapando completamente el desagüe con la superficie inferior del mismo.

Aplicarlo al caso de  $H = 1.0 \text{ m}$ ,  $r = 10.0 \text{ cm}$ ,  $e = 1.0 \text{ cm}$ ,  $\gamma_s = 1.5 \text{ t/m}^3$  y  $\gamma = 1.0 \text{ t/m}^3$

En ambos casos no hay resultante de empujes horizontales por que se elimina (aunque sí tendremos presión horizontal sobre el tapón). Las acciones se limitarán únicamente al eje vertical.

- Peso del tapón:

$$P = \gamma_s V = \gamma_s \pi r^2 e \tag{2.80}$$

- Empuje vertical sobre la parte alta del tapón: Tomando como superficie de referencia el fondo de la bañera, se puede expresar como el peso del cilindro de agua de radio  $r$  que va de la superficie al fondo menos el peso en agua del cilindro de radio  $r$  y espesor  $e$ :

$$Ev_1 = \pi r^2 (H - e) \gamma \tag{2.81}$$

- Subpresión bajo el tapón: Esta acción solo actúa en el primero de los casos, ya que en el segundo la presión que se tiene por debajo es la correspondiente a la atmosférica (presión relativa nula). La subpresión se puede calcular como en el caso anterior, tomando como altura  $H$  y teniendo en cuenta que su sentido es hacia arriba.

$$Ev_2 = \pi r^2 H \gamma \tag{2.82}$$

La diferencia entre ambos casos radica en los términos considerados a la hora de calcular la fuerza resultante:

- Tapón apoyado en el fondo:  $F_1 = P + Ev_1 - Ev_2$

$$F_1 = \gamma_s \pi r^2 e + \pi r^2 (H - e) \gamma - \pi r^2 H \gamma = (\gamma_s - \gamma) \pi r^2 e \tag{2.83}$$

que coincide con el peso sumergido del tapón.

- Tapón sobre el desagüe:  $F_2 = P_s + Ev_1$

$$F_2 = \gamma_s \pi r^2 e + \pi r^2 (H - e) \gamma = \gamma \pi r^2 [H + e (\gamma'_s - 1)] \tag{2.84}$$

siendo  $\gamma'_s = \frac{\gamma'_s}{\gamma}$  la densidad relativa del tapón.

Aplicando los datos del enunciado:

$H = 1.0 \text{ m}$ ,  $r = 0.10 \text{ m}$ ,  $e = 0.01 \text{ m}$ ,  $\gamma_s = 1.5 \cdot 9810 = 14715 \text{ N/m}^3$  y  $\gamma = 9810 \text{ N/m}^3$ , se tiene:

- Peso del tapón:  $1.5 \cdot 9810\pi \cdot 0.10^2 \cdot 0.01 = 4.6229 \text{ N}$
- Peso sumergido del tapón:  $(1.5 - 1.0) 9810\pi \cdot 0.10^2 \cdot 0.01 = 1.541 \text{ N}$
- Peso del cilindro de agua por encima del tapón:  $\pi 9810 \cdot 0.1^2 (1.0 - 0.01) = 305.108 \text{ N}$
- Subpresión:  $\pi 9810 \cdot 0.1^2 \cdot 1.0 = 308.190 \text{ N}$

Los valores de las fuerzas en las situaciones 1 y 2 planteada serán por tanto:

- Tapón apoyado en el fondo:  $F_1 = 1.541 \text{ N}$
- Tapón sobre el desagüe:  $F_2 = 4.6229 + 305.108 = 309.7309 \text{ N}$

Además debe destacarse que en el primer caso la fuerza ( $F_1$ ) es independiente de la profundidad mientras que en el segundo ( $F_2$ ) la fuerza aumenta proporcionalmente con ésta, con excepción del peso del tapón.



## 2.7.4 Equilibrio del sólido semisumergido

Un cuerpo sólido, con densidad superior a la atmosférica, que al meterlo en un fluido asciende hasta la superficie, queda flotando en equilibrio. En esa posición el empuje de Arquímedes debe igualar al peso del sólido, por tanto el volumen sumergido, o **Volumen de carena**  $V_c$  será igual a:

$$V_c = \frac{P}{\gamma} \quad (2.85)$$

siendo:

$P$	Peso del sólido en el aire	(N)
$\gamma$	Peso específico del fluido	(N/m <sup>3</sup> )

Al centro de gravedad del volumen de carena, se le denomina **Centro de carena** ( $C$ ), y por él pasa el vector con el empuje de Arquímedes.

Entre dos posiciones de equilibrio adyacentes, se tendrá que el volumen de carena en ambas debe ser igual. Por tanto, existirá un único centro de rotación instantáneo que permita pasar de la posición 1 a la 2 sin variar el volumen de carena. Este centro de rotación sobre el que gira el sólido se le denomina **Metacentro** ( $M$ ). En el metacentro es donde se cortan los vectores que contienen el empuje de Arquímedes, y es el punto donde se aplica éste.

El metacentro se corresponde, por tanto, con el centro de curvatura de la línea que une los dos centros de carena  $C - C'$ . A la superficie que une todos los posibles centros de carena se le denomina **Superficie de carena** ( $S_c$ ). Téngase en cuenta que los giros en el metacentro pueden realizarse en todas las direcciones del espacio.

Una forma intuitiva de comprender este cambio entre dos flotaciones adyacentes, es imaginando que el sólido se comporta como un péndulo colgado del metacentro.

A la superficie que resulta del corte del sólido por el plano formado por la superficie libre del fluido se le denomina **Plano de flotación** ( $P_f$ ).

La envolvente de todos los posibles planos de flotación en las distintas posiciones en equilibrio se le llama **Superficie de flotación** ( $S_f$ ), y será tangente a cada plano de flotación en un único punto ( $g$ ) que coincide con el centro de gravedad del plano de flotación como se demuestra mediante el Primer Teorema de Euler.

**Primer Teorema de Euler**

Supongamos dos flotaciones adyacentes como la mostradas en la figura 2.12

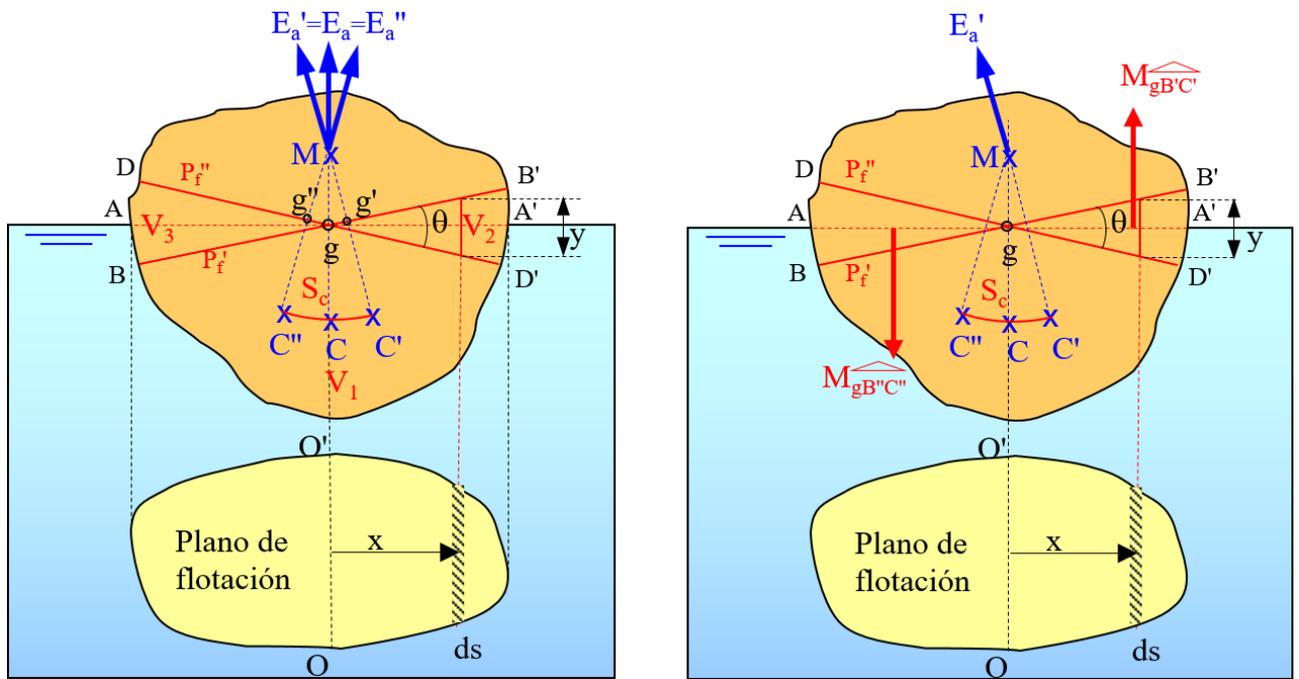


Figura 2.12: Demostración de los teoremas de Euler

Si ambas son flotaciones estables, el volumen sumergido, o volumen de carena  $V_c$ , debe ser el mismo en ambos casos:

$$\left. \begin{aligned} V_c &= V_1 + V_2 \\ V_c &= V_1 + V_3 \end{aligned} \right\} \rightarrow V_2 = V_3 \tag{2.86}$$

Por lo tanto  $V_1 - V_2 = 0$ . Desarrollando los volúmenes, y teniendo en cuenta que  $y = \theta x$  se tiene:

$$V_2 - V_3 = \int_O^{A'} y ds - \int_O^A y ds = \int_A^O y ds + \int_0^{A'} y ds = \theta \int_A^{A'} x ds = 0 \tag{2.87}$$

Teniendo en cuenta la expresión del momento de primer orden o momento estático para determinar la posición del centro de gravedad de una superficie respecto de un eje dado:

$$M_e = \int_s x ds = S x_{cdg} \quad (2.88)$$

siendo  $x$  la distancia del eje a cada elemento diferencial de superficie. Sustituyendo esta expresión en (2.87) se tiene:

$$V_2 - V_3 = \theta x_{cdg} S_f = 0 \quad (2.89)$$

siendo:

$x_{cdg}$	Distancia desde el eje $OO'$ al centro de gravedad	$(m)$
$S_f$	Superficie del plano de flotación considerado	$(m^2)$

Para que se satisfaga la igualdad dada en la ecuación (2.89), se tiene que cumplir que  $x_{cdg} = 0$ , lo que demuestra que el centro de gravedad se encuentra sobre el eje  $OO'$ .

Realizando este mismo razonamiento para dos flotaciones adyacentes girando sobre otro eje distinto de flotación, se llega a que el punto  $g$  es el corte de ambos ejes y coincide con el centro de gravedad del plano de flotación.

Esto implica que la superficie de flotación es convexa, ya que en caso contrario existirían dos centros de gravedad ( $g$ ) en un mismo plano de flotación, lo que no es posible.

Ténganse en cuenta que en el caso de que un plano de flotación esté constituido por dos superficies separadas (ej: la flotación de un catamarán), el centro de gravedad ( $g$ ) puede caer fuera de las dos superficies.

### Flotación estable de un cuerpo semisumergido

Un cuerpo semisumergido tiene una flotación estable cuando:

- Su peso es igual al peso del volumen del líquido desalojado.
- Su centro de gravedad y su centro de carena están alineados en la misma vertical.
- El metacentro se encuentra situado por encima del centro de gravedad.

Para definir matemáticamente la flotación estable únicamente falta definir la posición del metacentro ( $M$ ) para ello, se utiliza el segundo teorema de Euler.

### Segundo Teorema de Euler

Supongamos dos flotaciones estables próximas, representadas en la figura 2.12 por los planos  $BB'$  y  $DD'$ . Se ha definido el metacentro como el eje de rotación entre ambas flotaciones. Por tanto, el punto  $M$  coincidirá con el centro de curvatura de la superficie de carena  $S_c$  formada por la curva  $C''CC'$ .

Si estudiamos los momentos en  $C''$  originados por la variación de fuerzas debidas al cambio de flotación entre los planos de flotación  $P'_f$  y  $P''_f$ , se tiene que  $\overline{C''C'} \cdot E'_a$  es igual al momento generado por las cuñas  $\widehat{gC'B'}$  y  $\widehat{gC''B''}$ .

$$\overline{C''C'} \cdot E'_a = M_{\widehat{gC'B'}} + M_{\widehat{gC''B''}} \tag{2.90}$$

Los momentos se pueden determinar mediante:

$$M_{\widehat{gC'B'}} + M_{\widehat{gC''B''}} = \int_0^{A'} \gamma x y ds + \int_0^A \gamma x y ds = \theta \gamma \int_{A'}^A x^2 ds = 0 \tag{2.91}$$

De manera similar, al caso anterior, el momento estático de segundo orden, o momento de inercia del plano de flotación respecto del eje  $OO'$  es:

$$I_{OO'} = \int_s x^2 ds \tag{2.92}$$

por lo que la ecuación 2.91 se puede escribir:

$$M_{\widehat{gC'B'}} + M_{\widehat{gC''B''}} = \theta \gamma I_{OO'} \tag{2.93}$$

La distancia  $\overline{C''C'}$  puede expresarse en función de la distancia  $\overline{MC}$  y el ángulo  $\theta$  de giro entre ambos planos de flotación, mediante:

$$\overline{C''C'} = \theta \overline{MC} \tag{2.94}$$

Uniendo las ecuaciones (2.90), (2.93) y (2.94), se tiene:

$$\theta \overline{MC} \cdot E'_a = \theta \gamma I_{OO'} \quad \longrightarrow \quad \overline{MC} = \frac{\gamma I_{OO'}}{E'_a} = \frac{I_{OO'}}{V_c} \tag{2.95}$$

Lo que permite determinar la posición del metacentro ( $M$ ) una vez conocida la posición del centro de carena ( $C$ ), pudiendo entonces comprobarse que el centro de gravedad esté por debajo del metacentro, lo que es condición indispensable para que la flotación sea estable. En caso contrario, el sólido girará para buscar una nueva situación de flotación en equilibrio.

### Brazo estabilizador

El brazo estabilizador ( $\delta$ ) se corresponde con la distancia existente entre el metacentro ( $M$ ) y el cdg del sólido en flotación ( $G$ ), siendo positiva cuando el metacentro se encuentra por encima del cdg y negativa en caso contrario.

En un sólido en flotación las únicas fuerzas actuantes son el peso y el empuje de Arquímedes. Ambas son verticales, y deberán estar alineadas para verificar el equilibrio. Cualquier desplazamiento de una de ellas sobre la recta vertical que une a ambas genera un momento que las devuelve a su posición de equilibrio. En caso de situarse  $G$  por encima de  $M$  este momento produce un vuelco del sistema de fuerzas.

Las '*Recomendaciones de Obras Marítimas*' (ROM) son las normas utilizadas en nuestro país para la construcción de obras marítimas. En el caso de diques y muelles formados por estructuras de cajones verticales, la ROM recomienda un brazo estabilizador mínimo de 0.5 m para el transporte por flotación de este tipo de estructuras.

### Ejemplo

#### Flotación de una barcaza

Una barcaza para el transporte de agua tiene dimensiones de 50x15x6 metros con un espesor de paredes de 0.5 m. Su masa total es de 1300 t y su c.d.g. se encuentra a 1.70 m por encima del fondo. Determine la posición del centro de carena, del metacentro y el brazo estabilizador. Tómese  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  y una densidad relativa del agua del mar de  $\gamma'_w = 1.025$

Para que haya flotación se tiene que cumplir que el peso ( $P$ ) iguale al empuje de Arquímedes ( $E_a = \gamma V_c$ ), siendo  $\gamma_w$  el peso específico del agua del mar y  $V_c$  el volumen de carena dado por:

$$V_c = 50 \cdot 15 \cdot h = \frac{P}{\gamma_w} = \frac{1300 \cdot 1000 \cdot 9.81}{1025 \cdot 9.81} = 1268.29 \text{ m}^3 \quad \rightarrow \quad h = 1.691 \text{ m} \quad (2.96)$$

siendo  $h = 1.691 \text{ m} < 6 \text{ m}$  la altura sumergida del fuste. Además de que el fuste no esté sumergido es necesario comprobar que el metacentro ( $M$ ) se sitúe por encima del centro de gravedad ( $G = 1.7 \text{ m}$ ). Para ello se calcula la posición del centro de carena ( $C$ ) desde el fondo de la barcaza como:

$$\overline{OC} = \frac{h}{2} = 0.8455 \text{ m} \quad (2.97)$$

A continuación se determina la posición el radio metacéntrico dado por:

$$\overline{CM} = \frac{I_{AA}}{V_c} = \frac{\frac{1}{12} 50 \cdot 15^3}{1268.29} = \frac{14062.5}{1268.29} = 11.0877 \text{ m} \quad (2.98)$$

Obsérvese que la inercia elegida se corresponde con el eje de giro que daría una menor elevación del metacentro respecto del punto de carena. Este último sería común en ambas rotaciones, no así el metacentro. Por tanto, debe elegirse el metacentro más bajo para asegurarse que estamos en la situación más inestable.

Como  $\overline{OM} = \overline{OC} + \overline{CM} = 11.93 \text{ m} < \overline{OG} = 1.70 \text{ m}$  la flotación es estable.

El brazo estabilizador se determina finalmente como:

$$\delta = \overline{OC} + \overline{CM} - \overline{OG} = 10.23 \text{ m} \quad (2.99)$$



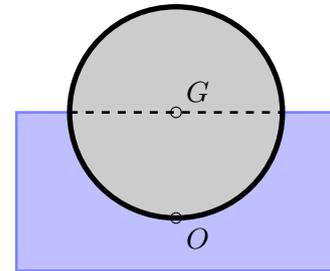
### Indicatriz de Dupín

Mediante la indicatriz de Dupín se demuestra que las superficie de flotación ( $S_f$ ) y la superficie de carena ( $S_c$ ) son paralelas. La demostración es puramente geométrica y no se va a llevar a cabo en detalle.

Por tanto, si la superficie de flotación no puede ser cóncava, tampoco lo será la superficie de carena.

### EJERCICIO 3

En el cilindro de altura  $h = 2.5 \text{ m}$  y radio  $r = 2.0 \text{ m}$ , que se muestra en la figura flotando en la posición indicada obtenga la expresión de la distancia del centro de gravedad al centro de carena ( $\overline{GC}$ ) de un cilindro de altura  $h$  y radio  $r$  que se encuentra flotando sumergido hasta la mitad



Test.

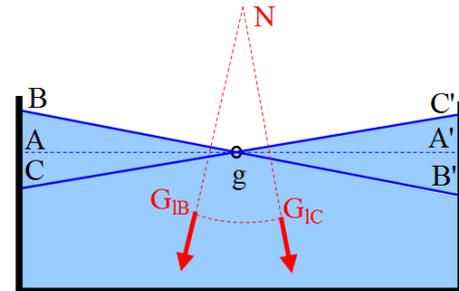
1. Aplíquelo al caso de  $h = 2.5 \text{ m}$  y  $r = 2.0 \text{ m}$ .

$$\overline{GC} = \quad m$$

### 2.7.5 Equilibrio del sólido semisumergido con lastre líquido en su interior

Un caso diferenciado del anterior es la existencia de sólidos flotando con líquidos en su interior, como pueden ser los barcos de transporte de líquidos (ej: petroleros), donde el movimiento de la masa del líquido interior, produce un desequilibrio que debe ser tenido en cuenta en el cálculo de la flotación.

El líquido en el interior del recipiente mantiene su superficie libre perpendicular a la dirección de la aceleración de la gravedad. Igual que ocurre con el sólido flotando, donde el empuje de Arquímedes ( $E_a$ ) se aplica sobre el metacentro ( $M$ ), por ser éste el centro de rotación instantáneo del movimiento, cuando movemos la masa líquida en el interior de un recipiente, tenemos un punto ( $N$ ) que hace esta función.



Aplicando el primer Teorema de Euler, explicado en la sección 2.7.4, al volumen encerrado bajo la superficie ( $\overline{AA'}$ ) se demuestra que el punto  $g$  es el centro de gravedad de la superficie libre y mediante el segundo Teorema de Euler (sección 2.7.4), se demuestra que la distancia  $\overline{NG_l}$ , siendo  $G_l$  el centro de gravedad del líquido confinado es:

$$\overline{NG_l} = \frac{I_{AA'}}{V_l} \tag{2.100}$$

Esto implica que el peso de un volumen líquido confinado en un recipiente con superficie libre, debe aplicarse en el punto  $N$ .

La inercia considerada  $I_{AA'}$  está referida al eje de giro de la oscilación que pasa por el centro de la superficie libre de la masa líquida estudiada. Para cada una de las masas líquidas interiores con superficie libre independiente se tendrá unos nuevos ejes de giro e inercia, en función del tamaño de la superficie libre respecto de este eje. Todos los ejes de giro serán paralelos entre sí para una misma oscilación del sistema.

Si seguimos manteniendo el criterio de que las fuerzas deben aplicarse sobre el centro de rotación instantáneo, cada uno de los volúmenes líquidos interiores con superficie libre independiente ( $i$ ) tendrá un punto  $N_i$  donde se aplica el peso del volumen de líquido. El centro de gravedad de todas las masas se obtiene mediante la suma de los productos de los pesos actuantes por sus puntos de aplicación respectivos, dividido por la suma total de masas. Es decir:

$$\overline{OG_T} = \frac{\sum_{j=1}^m \overline{OG_{Sj}} P_j + \sum_{i=1}^n \overline{ON_i} P_i}{P_i + P_j} \quad (2.101)$$

siendo:

$\overline{OG_T}$	Distancia del plano horizontal de referencia $O$ al centro de actuación todas las masas $G_T$
$\overline{OG_{Sj}}$	Distancia del plano horizontal de referencia $O$ al centro de gravedad ( $G_S$ ) de la masa sólida $j$
$\overline{ON_i}$	Distancia del plano horizontal de referencia $O$ al punto de aplicación de la carga dada por la masa líquida $i$
$P_j$	Peso de la masa sólida $j$
$P_i$	Peso de la masa líquida $i$
$j = 1, \dots, m$	Número de masas sólidas consideradas para el cálculo
$i = 1, \dots, n$	Número de masas líquidas interiores con superficie libre independiente

Es muy importante tener en cuenta que para un mismo volumen de líquido transportado, la división de éste en compartimentos separados dará lugar a que la suma de las inercias de todos ellos sea mucho menor que la inercia de un compartimento único. Ello provoca una elevación menor del punto  $N$  donde se aplican los pesos del conjunto de las masas líquidas, aumentando por tanto la distancia final entre el metacentro ( $M$ ) y el cdg conjunto de la masas líquidas y la barcaza que los contiene ( $G_T$ ). Esta distancia  $\overline{MG_T}$  es el brazo estabilizador  $\delta$  resultante. Cuanto mayor sea la distancia  $\overline{MG_T}$ , siempre con  $M$  por encima de  $G_T$ , mayor es la estabilidad con la que navegará nuestra barcaza.

**Ejemplo**

Flotación de una barcaza con lastre líquido interior

En la barcaza del ejemplo anterior, suponga un relleno interior de agua de mar de 4 m, y determine la posición del centro de carena, del metacentro y el brazo estabilizador.

Al existir un mayor peso formado por la parte sólida ( $P_s$ ) más los lastres líquidos ( $P_l$ ), la barcaza navegará más sumergida y necesitará un mayor volumen de carena dado por:

$$\begin{aligned} V_c = 50 \cdot 15 \cdot h &= \frac{P_s + P_l}{\gamma} = \frac{1300 \cdot 1000 \cdot 9.81 + 14 \cdot 49 \cdot 4 \cdot 1025 \cdot 9.81}{1025 \cdot 9.81} = \frac{1300}{1.025} + 14 \cdot 49 \cdot 4 \\ &= 1268.3 + 2744 = 4012.3 \text{ m}^3 \quad \rightarrow \quad h = \frac{4012.3}{750} = 5.35 \text{ m} \end{aligned} \quad (2.102)$$

siendo  $h = 5.35 \text{ m} < 6 \text{ m}$  la altura sumergida del fuste. Además de que el fuste no esté sumergido es necesario comprobar que el metacentro ( $M$ ) se sitúe por encima del centro de gravedad de la barcaza ( $G = 1.7 \text{ m}$ ) más el punto de aplicación de las cargas debidas a las masas líquidas interiores ( $N$ ). Para

ello se calcula la posición del centro de carena ( $C$ ) desde el fondo de la barcaza como:

$$\overline{OC} = \frac{h}{2} = 2.675 \text{ m} \tag{2.103}$$

A continuación se determina la posición el radio metacéntrico dado por:

$$\overline{CM} = \frac{I_{AA}}{V_c} = \frac{\frac{1}{12}50 \cdot 15^3}{4012.3} = \frac{14062.5}{4012.3} = 3.505 \text{ m} \tag{2.104}$$

La inercia elegida, como en el caso anterior es la debida al eje paralelo a la eslora que pasa por el centro de la barcaza.

Como  $\overline{OM} = \overline{OC} + \overline{CM} = 6.18 \text{ m}$

La masa líquida interior tiene de características:

- Area en planta del volumen líquido interior:  $A_i = (50 - 2 \cdot 0.50)(15 - 2 \cdot 0.50) = 686 \text{ m}^2$
- Volumen líquido interior:  $V_i = A_i \cdot h_i = 686 \cdot 4 = 2744 \text{ m}^3$
- Peso del agua interior:  $P_i = V_i \cdot \gamma = 2744 \cdot 1025 \cdot 9.81 = 27591606 \text{ N}$
- Posición del cdg del agua interior respecto del fondo:  $\overline{OG}_i = 0.50 + \frac{4}{2} = 2.5 \text{ m}$
- Inercia de la superficie libre interior respecto a eje eslora:  $I_i = \frac{1}{12}49 \cdot 14^3 = 11204.67 \text{ m}^4$

La posición del punto de aplicación de las carga debida al relleno interior de agua es:

$$\overline{ON} = \overline{OG}_i + \frac{I_i}{V_i} = 2.5 + \frac{11204.67}{2744} = 6.5833 \text{ m} \tag{2.105}$$

El punto de aplicación de los pesos de la barcaza ( $P_s = 1300 \cdot 1000 \cdot 9.81 = 12753000 \text{ N}$ ) más el agua interior ( $P_i$ ) se calcula mediante:

$$\overline{OG}_T = \frac{\overline{OG}P_s + \overline{ON}P_i}{P_s + P_i} = 5.04 \text{ m} \tag{2.106}$$

El brazo estabilizador se determina finalmente como:

$$\delta = \overline{OM} - \overline{OG}_T = 1.14 \text{ m} \tag{2.107}$$



**Ejemplo**

Flotación de una barcaza con lastre líquido interior y separación con mamparas

En la barcaza del ejemplo anterior, suponga que el relleno interior de agua de mar esta separado en cuatro zonas en dirección manga mediante mamparas de peso y espesor despreciable

En este caso el peso del lastre interior de líquido sería el mismo, por lo que se obtendría igual valor la altura sumergida o calado ( $h$ ) y del volumen de carena ( $V_c$ ). La altura de aplicación del CDG de los lastres líquidos  $\overline{OG}_i = 2.5 \text{ m}$  es la misma en los cuatro compartimentos.

La única variación se debe a la distancia existente entre el centro de gravedad de los lastres líquidos ( $G_i$ ) y el centro de aplicación de cada uno de estos pesos ( $N_i$ )

$$\overline{G_i N_i} = \frac{I_i}{V_i} = \frac{\frac{1}{12} 49 \left(\frac{14}{4}\right)^3}{\frac{4012.3}{4}} = \frac{175.073}{1003.075} = 0.1745 \text{ m} \quad (2.108)$$

Finalmente el punto de aplicación de los pesos de la barcaza ( $P_s = 12753000 \text{ N}$ ) más el agua interior ( $4P_i = 27591606 \text{ N}$ ) se calcula mediante:

$$\overline{OG}_T = \frac{\overline{OG}P_s + \sum_{i=1}^n \overline{ON}_i P_i}{P_s + \sum_{i=1}^4 P_i} = 2.145 \text{ m} \quad (2.109)$$

valor claramente inferior a los  $5.04 \text{ m}$  del caso anterior.

El brazo estabilizador resultante sería:

$$\delta = \overline{OM} - \overline{OG}_T = 6.18 - 2.145 = 4.035 \text{ m} \quad (2.110)$$

mejorando el  $1.14 \text{ m}$  del caso anterior.

Este comportamiento explica la división en compartimentos que se realiza en los buques de transporte de graneles líquidos.



## Soluciones a los Ejercicios

### EJERCICIO 1

El área de la compuerta es:

$$A = (3.2 - 1.2) 2.0 = 4 \text{ m}^2$$

La profundidad del centro de gravedad de la compuerta:

$$d_{cdg} = \frac{3.2 + 1.2}{2} = 2.2 \text{ m}$$

Utilizando las fórmulas dadas en la teoría, el empuje puede determinarse como:

$$F_H = \gamma d_{cdg} A = 9810 \cdot 2.2 \cdot 2.2 = 86328 \text{ N}$$

La profundidad al punto de aplicación del empuje se calcula mediante:

$$d_e = d_{cdg} + \frac{I_{cdg}}{d_{cdg} A} = 2.2 + \frac{\frac{1}{12} 2.0 (3.2 - 1.2)^3}{2.2 \cdot 4} = 2.3515 \text{ m}$$



**EJERCICIO 2**

La compuerta se abre cuando el momento en el eje de giro de la compuerta de la fuerza actuante sobre la compuerta y la ejercida por el cable se igualan:

$$E_h d = F_h h \quad (2.111)$$

siendo:

$E_h$	Empuje horizontal sobre la compuerta	(N)
$d$	Distancia al punto de aplicación del empuje desde el eje de giro	(m)
$F_h$	Componente horizontal de la fuerza ejercida por el cable	(N)
$h$	Brazo de la compuerta	(m)

Para la determinación del empuje horizontal de la compuerta se consideran las presiones a ambos lados de la misma, resultando la diferencia entre ambos

$$E_h = \pi \frac{D^2}{4} \gamma (z_{max} - z_B) = 3467.14 \text{ N} \quad (2.112)$$

El brazo de este empuje resulta:

$$d = \frac{D}{2} = 0.150 \text{ m} \quad (2.113)$$

La fuerza se obtiene del equilibrio de fuerzas verticales en la boya cilíndrica

$$F = \pi \frac{D_b^2}{4} \gamma (z_{max} - z_1) \quad (2.114)$$

La componente horizontal de esta fuerza es:

$$F_h = \frac{\sqrt{2}}{2} F \quad (2.115)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.112), (2.113), (2.114) y (2.115) en (2.111), y despejando  $D_b$ , se tiene:

$$D_b = \sqrt{\frac{\sqrt{2} D^3}{2 h} \frac{z_{max} - z_B}{z_{max} - z_1}} \sqrt{\frac{\sqrt{2} 0.3^3}{2 \cdot 0.6} \frac{8 - 3}{8 - 5}} = 0.2303 \text{ m} \quad (2.116)$$

La compuerta comienza a cerrarse cuando el momento del peso de la compuerta ( $P$ ) respecto del eje de giro de la misma igual al momento de la fuerza ( $F_2$ ) que se realiza en el cable. Planteando el equilibrio de momentos:

$$P \frac{D}{2} = F_2 h \quad (2.117)$$

Como la compuerta se ha abierto, la boya habrá subido una distancia:

$$L_b = \sqrt{2} h = \sqrt{2} \cdot 0.6 = 0.84853 \text{ m} \quad (2.118)$$

con lo que la fuerza realizada por el cable es:

$$F_2 = \pi \frac{D_b^2}{4} \gamma (z_2 - z_1 - L_b) = \pi \frac{0.2303^2}{4} 1000 \cdot 9.81 (6 - 5 - 0.84853) = 61.89 \text{ N} \quad (2.119)$$

Por tanto el peso de la compuerta será:

$$P = \frac{\pi D_b^2}{2 D} \gamma h (z_2 - z_1 - L_b) = \frac{\pi 0.2303^2}{2 \cdot 0.3} 1000 \cdot 9.81 (6 - 5 - 0.84853) = 247.56948 \text{ N} \quad (2.120)$$

Si se aumenta el nivel en el depósito B, se incrementan las presiones en el lado aguas abajo de la compuerta haciendo que el empuje total resultante sobre la misma disminuya, por lo que se requerirá menor fuerza para abrirla. Esto implica que el nivel en A no se elevará tanto.



**EJERCICIO 3**

0.61.0 El aspecto más destacable es que en el cilindro flotando tum- bado, la posición de equilibrio es indiferente respecto del eje horizontal que pasa por el centro del cilindro. Ello implica que el centro de gravedad de la sección ( $\overline{OG}$ ) coincide con el centro de curvatura de los centros de carena o metacentro, es decir:

$$\overline{OG} = \overline{OM} = r \quad (2.121)$$

Lo mismo ocurre con una esfera, pero en ese caso para todas las direcciones de vuelco.

Por tanto la posición del centro de carena  $\overline{OC} = \overline{OM} - \overline{CM}$  puede determinarse teniendo en cuenta el segundo teorema de Euler:

$$\overline{MC} = \frac{I_{GG'}}{V_c} \quad (2.122)$$

La inercia del plano de flotación respecto del eje  $GG'$  que pasa por el centro del cilindro es:

$$I_{GG'} = \frac{1}{12}h(2r)^3 \quad (2.123)$$

El volumen de carena es la mitad del volumen del cilindro

$$V_c = \frac{1}{2}\pi \cdot r^2 \cdot h \quad (2.124)$$

Con lo que resulta:

$$\overline{MC} = \frac{4r}{3\pi} \quad (2.125)$$

Finalmente la distancia del punto  $O$  al centro de carena será

$$\overline{OC} = r - \frac{4r}{3\pi} = r \left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) \quad (2.126)$$

Aplicándolo a los datos del problema:

$$\overline{OC} = 2.0 \left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) = 1.151 \quad (2.127)$$

