



**POLITÉCNICA**

“Ingeniamos el futuro”

# Medios porosos

E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos



2016

Otros autores que han contribuido en esta obra son:

- Luis Garrote de Marcos
- Isabel Granados García
- Francisco Laguna Peñuelas
- Eduardo Martínez Marín
- Eduardo Martínez Olmos

Los autores agradeces las sugerencias, correcciones y contribuciones que puedan mejorar el siguiente contenido:

[jaime.garcia.palacios@upm.es](mailto:jaime.garcia.palacios@upm.es)

[cristian.ponce@caminos.upm.es](mailto:cristian.ponce@caminos.upm.es)



Hidráulica e Hidrología: Medios porosos  
se encuentra bajo una licencia Creative Commons  
Attribution-NonCommercial 4.0 International

# Contents

<b>9 El medio poroso</b>	<b>5</b>
9.1 Introducción . . . . .	5
9.2 El medio poroso . . . . .	5
9.3 Ley de Darcy . . . . .	8
9.4 Generalización de la Ley de Darcy . . . . .	12
9.5 Permeabilidades equivalentes . . . . .	12
9.5.1 Flujo en terrenos dispuestos en paralelo . . . . .	12
9.5.2 Flujo en terrenos dispuestos en serie . . . . .	13
9.5.3 Analogía eléctrica . . . . .	14
9.6 Ecuación de continuidad . . . . .	15
9.7 La función de corriente . . . . .	17
9.8 Movimiento irrotacional . . . . .	18
9.9 Potencial de velocidades . . . . .	18
9.10 Ecuación de Laplace . . . . .	19
9.11 Red de flujo . . . . .	20
9.12 Condiciones de contorno . . . . .	20
9.13 Resolución de la Ecuación de Laplace . . . . .	21
9.14 Hipótesis de Dupuit . . . . .	22
Ejemplo: Caudal extraído de una zanja . . . . .	22
9.15 Acuífero confinado . . . . .	24
Ejemplo: Cálculo de la permeabilidad en un acuífero confinado. . . . .	25

9.16 Acuífero con superficie libre . . . . . 26

    Ejemplo: Cálculo de la permeabilidad en un acuífero libre. . . . . 27

## 9.1 Introducción

Una parte importante de la hidráulica dentro de la ingeniería civil consiste en la construcción de estructuras de contención de agua. Algunas de ellas están realizadas con materiales permeables, por ejemplo las presas de materiales sueltos.

En otras obras, aparentemente impermeables, como las presas de gravedad realizadas con hormigón también existe el fenómeno de filtración de agua, que aunque puede considerarse pequeño debe ser controlado.

En general un problema importante es el que se puede producir a través de los terrenos de cimentación de las presas por la influencia que tiene sobre la estabilidad de ésta.

Otro ejemplo de porqué es necesario conocer la red de filtración a través de un medio poroso es el transporte de contaminantes, que diluidos en el agua pueden circular con él pudiendo contaminar pozos, zonas de cultivo, etc.

También, el conocimiento del flujo en el interior de los acuíferos es un dato primordial a la hora de dimensionar las extracciones o recargas de agua mediante pozos. De esta forma se puede establecer un adecuado equilibrio hidráulico.

## 9.2 El medio poroso

Un medio poroso consiste en una parte sólida con una cantidad grande de poros microscópicos en su interior más las gargantas o huecos entre ellos. Esta red de estrechos conductos es el camino por donde el fluido puede atravesar el medio. Una composición de suelo y la arena son ambos ejemplos de medios porosos. El flujo del líquido en un medio poroso se puede entender al imaginarnos una taza de agua que se vierte sobre el terreno y como esta fluye a través del medio debido a las fuerzas gravitacionales.

La descripción del flujo en medios porosos es extremadamente difícil debido a la complejidad del mismo. Aunque el flujo a través de una conducción se puede determinar por ecuaciones simples, cuando se considera la red de canalizaciones de un medio poroso, esta no es conocida, lo que añade

un alto grado de incertidumbre en el cálculo.

Para el estudio de los medios porosos, no se considera el detalle, sino que se toman las características medias de una zona de terreno homogénea. No se suelen considerar muestras de terreno inferiores a un metro por el error que se puede introducir al determinar las características medias. En caso de que la granulometría del medio fuera de gran tamaño la muestra debería ser, evidentemente, mayor.

Hay varios parámetros importantes que describen las características medias de un medio poroso:

- La porosidad  $n$  es la fracción de volumen del medio ocupada por los poros

$$n = \frac{V_h}{V_t} \tag{9.1}$$

siendo el volumen total  $V_t$  el volumen de huecos ( $V_h$ ) más el volumen de sólido ( $V_s$ ). Por lo tanto, la porosidad estará comprendida entre cero (no hay huecos en el volumen) y uno (todo huecos, sin sólido)

Evidentemente, para medios porosos formados por piezas grandes, por ejemplo escolleras de varios centímetros de diámetro medio, un volumen de  $1 \text{ m}^3$  puede no ser suficiente para describir la porosidad media.

La porosidad media, una vez determinada, es utilizada con frecuencia para la descripción de la totalidad del medio en que nos encontramos.

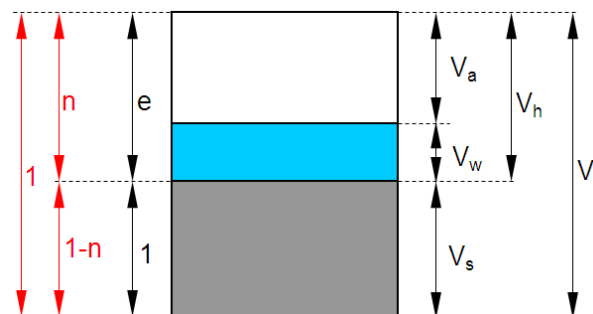


Figura 9.1: Caracterización del medio poroso

- El índice de poros  $e$ , es una definición equivalente a la anterior y con una relación biunívoca con esta. Se define como el volumen de huecos sobre el volumen de sólido.

$$e = \frac{V_h}{V_s} \tag{9.2}$$

Las equivalencias entre ambas medidas puede verse en la figura 9.1, y se expresan matemáticamente mediante las relaciones:

$$n = \frac{e}{1 + e}; \quad e = \frac{n}{1 - n} \tag{9.3}$$

- La permeabilidad  $K$ . Este parámetro describe la capacidad del fluido, generalmente agua, para fluir a través del medio poroso. Como se verá más adelante, depende de la geometría del medio más las características del fluido que lo atraviesa.

A continuación vamos a estudiar la influencia de la geometría de forma sencilla. Para ello, imaginemos un medio formado por partículas sólidas esféricas perfectas de radio  $R$  dispuestos en las esquinas de un cubo de ancho  $2R$  (ver figura 9.2(a), cuyas proyecciones en planta, alzado y perfil son iguales, y pueden verse en la figura 9.2(b).

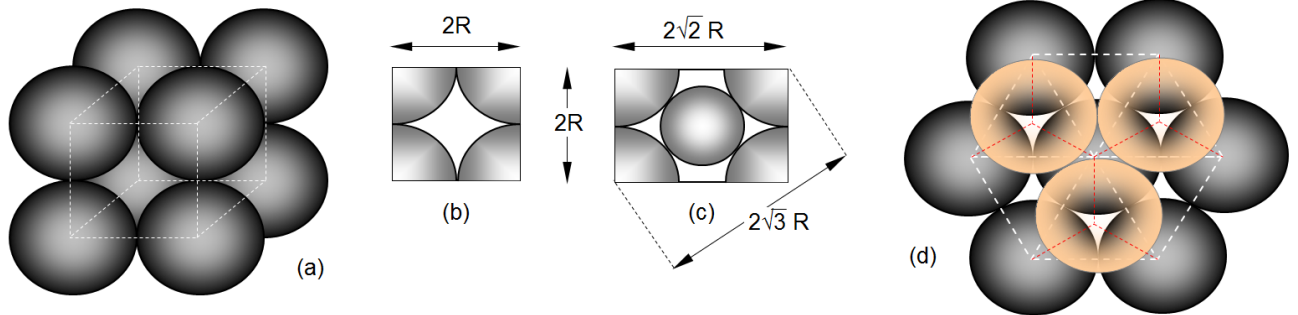


Figura 9.2: Medio poroso formado por esferas perfectas

La porosidad puede calcularse en este caso como el volumen total del cubo menos el de una esfera (un octavo de cada esfera es la parte que queda en el interior del cubo), dividido, todo ello, por el volumen total del cubo:

$$n = \frac{V_h}{V_t} = \frac{(2R)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3}{(2R)^3} = 1 - \frac{\pi}{6} = 0.4796 = 47.96\% \quad (9.4)$$

Este valor de la porosidad es muy elevado, primero porque suponemos esferas perfectas, segundo, porque se han colocado de forma que mantienen una cantidad máxima de huecos, ya que lo lógico es que las esferas se colocaran en los vértices extremos de tetraedros, no de cubos, como muestra la figura 9.2(d), y en tercer lugar porque consideramos el sólido formado por un único tamaño de esferas. Este ejemplo nos vale para tener un valor máximo de porosidad difícilmente superable.

Supongamos ahora la disposición mostrada en la figura 9.2(c), donde se ha añadido una nueva esfera, lo más grande posible, en el hueco intermedio que queda en el centro del cubo.

El radio  $r$  de esta esfera, se obtiene a través de la diagonal principal del cubo, y será:

$$R + 2r + R = \sqrt{3}(2R) \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{3}R - R = (\sqrt{3} - 1)R \quad (9.5)$$

La porosidad en este caso resulta:

$$n = \frac{(2R)^3 - \frac{4}{3}\pi (R^3 + r^3)}{(2R)^3} = 1 - \frac{\pi}{6} - \pi \left( \sqrt{3} - \frac{5}{3} \right) = 27.099\% \quad (9.6)$$

Comparando la geometría propuesta en las figuras 9.2(b) y 9.2(c) también puede observarse que en el segundo de los casos, los huecos que quedan tienen una gran cantidad de la superficie del hueco afectada por contornos, por lo que si el flujo que circula por ellos es viscoso, esto tendrá gran influencia. Por tanto, nos damos cuenta que la geometría del poro, dada por su radio hidráulico, también influye.

Así dos medios porosos con igual índice de poros  $n$  pero muy diferente geometría de los mismos, tendrán permeabilidades distintas. Este es otro de los motivos por lo que es necesario tomar una muestra del medio lo suficientemente grande para obtener un valor medio de la porosidad.

### 9.3 Ley de Darcy

El primero que estudio el flujo a través de los medios porosos fue Darcy en 1856 cuando recibió el encargo de estudiar el comportamiento de las fuentes de la ciudad de Dijon en francia.

Para ello, se le ocurrió medir el caudal que atravesaba un medio poroso en función de una pérdida de carga conocida entre sus dos extremos. Para ello utilizó un permeámetro como el de la figura 9.3 donde se puede ver un medio homogéneo encerrado en un tubo en el que se aplica una diferencia de altura piezométrica entre sus extremos de:

$$\Delta h = z_1 + \frac{P_1}{\gamma} - \left( z_2 + \frac{P_2}{\gamma} \right) \tag{9.7}$$

En el caso de Darcy este permeámetro lo dispuso vertical, aunque aquí, y por motivos de claridad, se halla dispuesto inclinado.

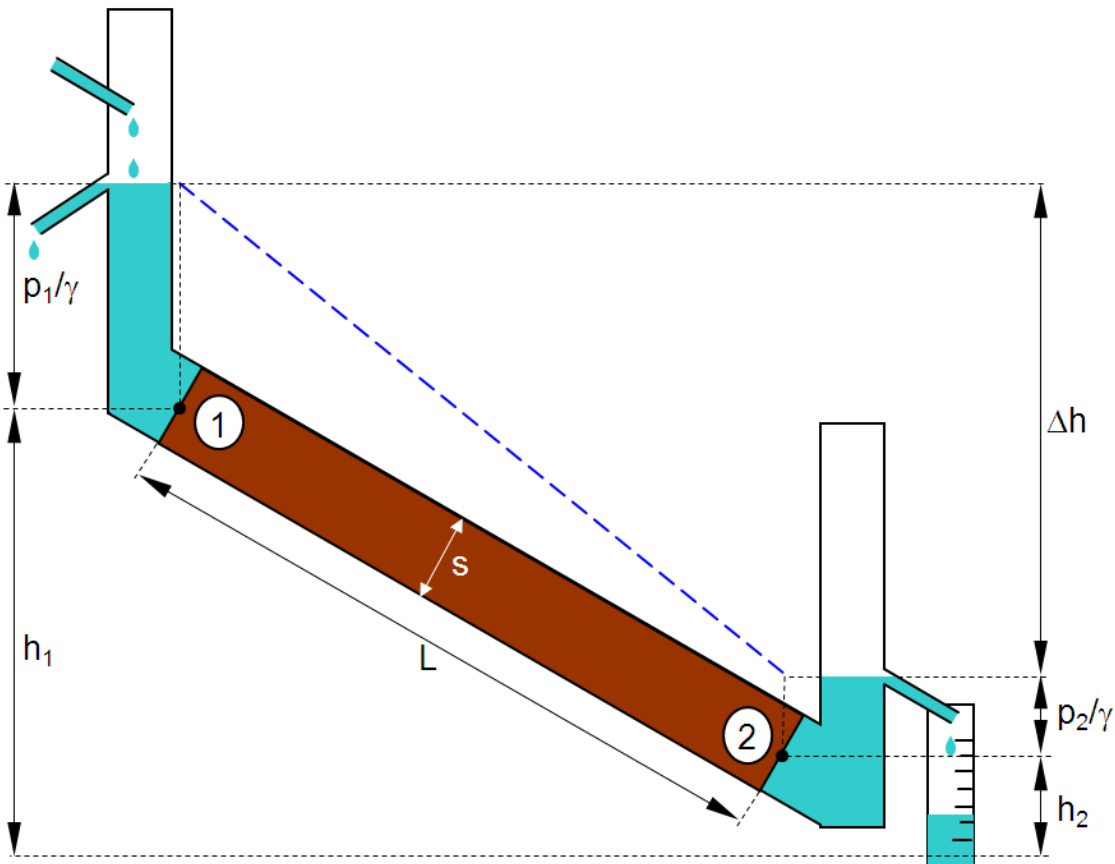


Figura 9.3: Permeámetro para el estudio del flujo de agua



La diferencia de carga entre los extremos 1 y 2 es la que hace que haya un flujo de 1 a 2.

Darcy realizó todos sus experimentos con una velocidad lenta de filtración manteniendo un régimen laminar entre sus extremos (número de Reynolds inferior a 2300). Esto hace que esta ley no sea válida cuando el flujo es turbulento ya que la pérdida de carga dejaría de ser una función lineal de la velocidad.

El sistema se mantiene con esa diferencia de carga constante hasta conseguir su estabilización en el tiempo. Para ello se disponen los rebosaderos inferior y superior del permeámetro, y se aporta siempre más agua de la que rebosa por el superior. En ese momento se supone que el líquido llena totalmente los poros y que las únicas fuerzas actuantes son la gravedad y la viscosidad.

En el extremo inferior se mide la cantidad de líquido que sale por el rebosadero en un intervalo de tiempo conocido, obteniéndose así, el caudal que atraviesa la muestra.

Para la definición del flujo a través de un medio poroso mediante la ecuación de Darcy considere un medio poroso con permeabilidad absoluta  $K$  en un campo gravitacional homogéneo donde se hace atravesar un líquido de viscosidad  $\mu$  y peso específico  $\gamma$  a través del medio aplicando un gradiente de presión  $\Delta h$  entre ambos extremos del mismo tal que el movimiento sea laminar. Entonces el caudal que circula el medio es dado por la ecuación de Darcy:

$$Q = -K \cdot S \frac{\Delta H}{L} \quad (9.8)$$

siendo  $S$  la sección atravesada por el flujo y  $L$  la longitud recorrida en el medio.

La forma de fluir a través de los poros se caracteriza primordialmente por la viscosidad dinámica  $\mu$  y el peso específico  $\gamma$ . La viscosidad refleja la resistencia del líquido a fluir debido a las fuerzas tangenciales y a las deformaciones angulares.

A nivel microscópico se producen fuerzas de fricción debidas a las colisiones entre las moléculas. La magnitud de las fuerzas de fricción son las que establecen el valor viscosidad del líquido.

Otra expresión para la viscosidad que se utiliza a menudo, es la viscosidad cinemática  $\nu$ , definida como:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (9.9)$$

siendo  $\rho$  la densidad del líquido.

Si se considera un fluido newtoniano incompresible, la densidad tiene un comportamiento isotrópico (tensor de tensiones con valor negativo de la presión en la diagonal y cero en el resto), el valor de la viscosidad dinámica ( $\mu$ ) es suficiente para la definición del fluido.

La velocidad media  $V$  del movimiento del agua en el medio poroso puede por tanto deducirse mediante:

$$V = \frac{Q}{S} = -K \frac{\Delta H}{L} \quad (9.10)$$

Esta velocidad es la media de la totalidad de la sección, cuando en realidad en fluido únicamente circula por los poros. Si consideramos la velocidad de las partículas que circula por los poros, se tiene

la velocidad real aparente  $V_R$ :

$$V_R = \frac{V}{n} \quad (9.11)$$

La velocidad es aun mayor porque además debe considerarse que:

- El fluido no se mueve mediante una trayectoria recta directa del extremo 1 al 2, sino que tiene que ir recorriendo un tortuoso camino a través de los huecos.
- La velocidad en un poro es distinta en los bordes que en el centro.
- En el índice de poros están incluidos los poros intersticiales del material, que aunque estén llenos de agua, esta no se mueve, por lo que si se toma como valor de la porosidad un  $n' < n$ , donde  $n'$  es el índice de poros no intersticiales, la velocidad real aparente será mayor.

Este problema de la velocidad real puede ser muy importante cuando el fluido aflora en la superficie de un medio poroso ya que pueden tenerse velocidades capaces de arrastrar las partículas de la superficie. Si estas forman parte de una estructura de contención, como por ejemplo una presa de materiales sueltos, se puede llegar tener una rotura de la misma.

La pendiente de pérdidas  $I$  expresa la pérdida de energía por unidad de avance:

$$I = -\frac{\Delta H}{\Delta x} \quad (9.12)$$

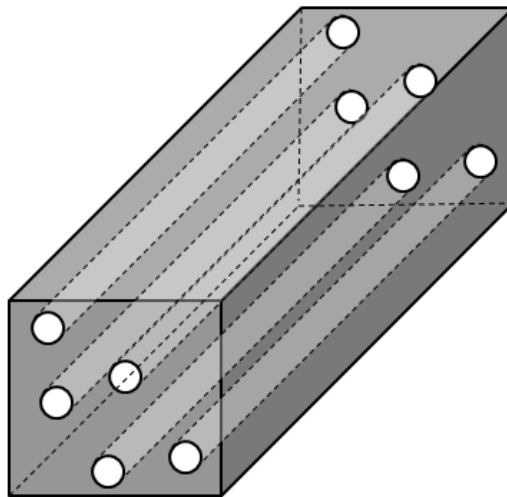


Figura 9.4: Red de poros formada por tubos de igual diámetro

Suponiendo el caso particular de que la red de poros estuviera formada por tubos circulares de diámetro  $D$  del tubo equivalente, como muestra la figura 9.4, ya se ha visto, en el caso de las tuberías, que la pérdida de carga puede expresarse como:

$$I = \frac{f V^2}{D 2g} \quad (9.13)$$

siendo  $\Delta H$  la diferencia de energía entre ambos extremos que, al ser la velocidad muy baja, hace que el término  $\frac{V^2}{2g}$  sea despreciable, y por tanto las líneas de energía y piezométrica son casi coincidentes, lo que puede expresarse como:

$$\Delta H \approx \Delta h \quad (9.14)$$

que es estrictamente cierto si la sección a lo largo del permeámetro donde está dispuesto el material se mantiene constante, al ser ambas rectas paralelas.

Si se utiliza la expresión del número de Reynolds dado por:

$$R_e = \frac{V \cdot D}{\nu} \quad (9.15)$$

y tenemos en cuenta que en régimen laminar  $f = \frac{64}{R_e}$ , la pendiente de pérdidas puede expresarse por :

$$I = \frac{f}{D} \frac{V^2}{2g} = \frac{64}{R_e} \frac{V^2}{2g} = \frac{32}{R_e D} \frac{V^2}{g} = \frac{32}{\frac{V \cdot D}{\nu} D} \frac{V^2}{g} = \frac{32\nu}{D^2} \frac{V}{g} = \frac{32\nu V}{\gamma D^2} \quad (9.16)$$

con lo que la velocidad resulta:

$$V = \frac{\gamma D^2}{32\nu} I \quad (9.17)$$

En este caso la permeabilidad, se obtendría de las ecuaciones (9.10) y (9.17), y sería equivalente a:

$$K = \frac{\gamma D^2}{32\nu} \quad (9.18)$$

Si en vez de suponer un conducto circular, hubiéramos trabajado en un conducto con ranuras, se tendría:

$$V = \frac{\gamma D^2}{12\nu} I \quad (9.19)$$

obteniéndose en esta caso otro valor para la permeabilidad.

Ninguno de estos valores sería el correcto porque la red de huecos a través de los que pasa el agua está formada por cavidades de todo tipo, pero lo que sí es importante es destacar que la permeabilidad es función del:

- Medio que se atraviesa. Más concretamente de la geometría del mismo.
- Fluido que lo atraviesa. Más concretamente de su densidad y viscosidad.

La permeabilidad es un valor que varía mucho de unos medios a otros, y la tabla 9.1 se reflejan algunos de estos valores:

Suelo	$K$ (m/s)
Gravas	$1 \rightarrow 1 \cdot 10^{-2}$
Arenas limpias	$1 \cdot 10^{-2} \rightarrow 1 \cdot 10^{-5}$
Arenas arcillosas	$1 \cdot 10^{-5} \rightarrow 1 \cdot 10^{-8}$

Tabla 9.1: Coeficientes de permeabilidad de distintos terrenos

## 9.4 Generalización de la Ley de Darcy

Se ha determinado la ley de Darcy para una dirección, cuando la expresamos de forma tridimensional se tiene:

$$\begin{aligned}
 v_x &= -K \frac{\partial}{\partial x} \left( z + \frac{P}{\gamma} \right) \\
 v_y &= -K \frac{\partial}{\partial y} \left( z + \frac{P}{\gamma} \right) \\
 v_z &= -K \frac{\partial}{\partial z} \left( z + \frac{P}{\gamma} \right)
 \end{aligned} \tag{9.20}$$

Estas expresiones suponen un permeabilidad igual en todas las direcciones, lo que muchas veces no es cierto, como ocurre en las obras públicas cuando el material se coloca por compactación en sentido vertical (ej: con apisonadora), lo que hace que la permeabilidad horizontal sea inferior a la vertical. En esta caso, el medio ya no sería isótropo y la ecuación (9.20) resulta:

$$v_i = -K_{ji} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( z + \frac{P}{\gamma} \right) \tag{9.21}$$

donde  $K_{ij}$  es un tensor de 2º orden (3x3).

Si se toman las direcciones principales, se consigue que ese tensor solo tenga valores no nulos en su diagonal principal, y si se escalan los ejes mediante una transformación se puede conseguir que el valor de la permeabilidad coincida, pero hay que tener en cuenta estas transformaciones para trabajar con el problema, ya que se tendrá distinta escala en cada uno de los ejes principales.

## 9.5 Permeabilidades equivalentes

### 9.5.1 Flujo en terrenos dispuestos en paralelo

Imaginemos un medio poroso formado por estratos paralelos dispuestos en la dirección del flujo. Si suponemos que el flujo se mantiene horizontal, la permeabilidad equivalente a un medio homogéneo puede estudiarse en función del espesor de cada estrato. Para ello imaginemos el permeámetro mostrado en la figura 9.5

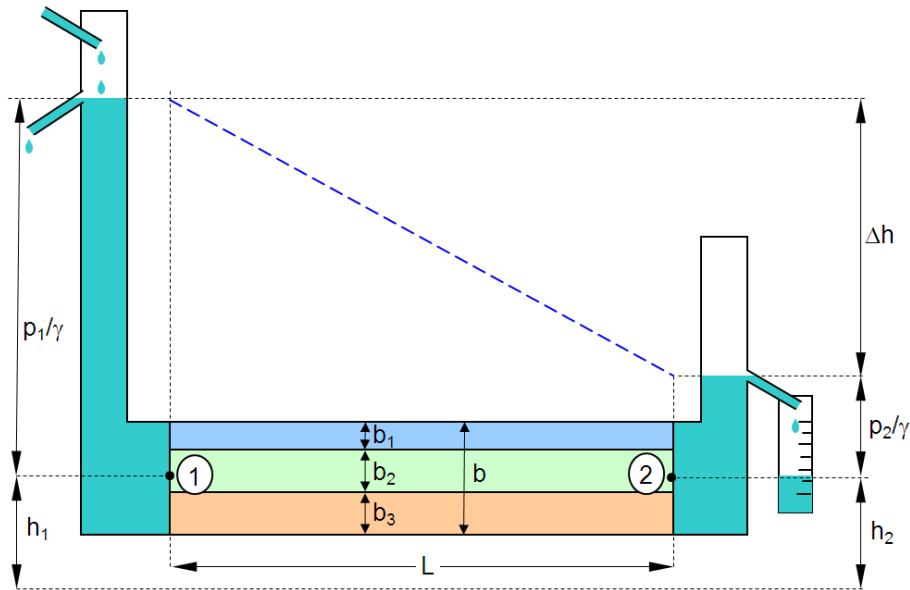


Figura 9.5: Permeabilidad equivalente en capas paralelas al flujo

En este caso el flujo total  $Q$  que atraviesa el permeámetro es la suma de los flujos que atraviesa cada una de las capas  $Q = \sum_{i=1}^n Q_i$ , siendo  $i$  el número de capa considerada y  $n$  el número de capas.

Todas las capas tienen una misma diferencia de potencial entre ellas dada por  $\Delta h/L$ , y distinta permeabilidad  $K_i$  y espesor  $b_i$ , siendo la suma de todos los espesores el espesor total  $b$  del permeámetro.

El caudal total puede expresarse en función del caudal circulante por cada una de las capas y de la permeabilidad equivalente del flujo en paralelo  $K^P$  como:

$$Q = bK^P \frac{\Delta h}{L} = \sum_{i=1}^n b_i K_i \frac{\Delta h}{L} = b \left( \frac{1}{b} \sum_{i=1}^n b_i K_i \right) \frac{\Delta h}{L} \quad (9.22)$$

Por lo que resulta:

$$K^P = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^n b_i K_i \quad (9.23)$$

### 9.5.2 Flujo en terrenos dispuestos en serie

En esta caso el esquema queda representado en la figura 9.6.

El espesor  $b$  es el mismo en todas las capas, y lo que cambia es la longitud de cada una de ellas  $L_i$  siendo la longitud total  $L$  la suma de todas.

Cada uno de los terrenos tendrá una pendiente de pérdidas  $\Delta h_i/L_i$  distinta, siendo la suma la pendiente de pérdidas equivalente  $\Delta h/L = \sum_{i=1}^n (\Delta h_i/L_i)$ .

El caudal que circula por el permeámetro es, por continuidad, el mismo que circula por cada uno

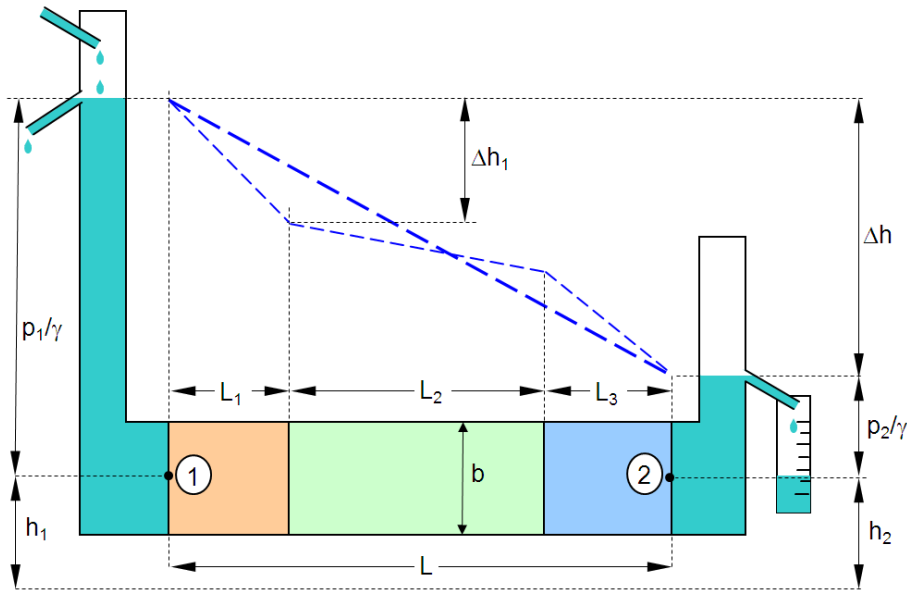


Figura 9.6: Permeabilidad equivalente en capas perpendiculares al flujo

de los terrenos, por lo que:

$$Q = bK_i \frac{\Delta h_i}{L_i} = bK^S \frac{\Delta h}{L} \quad \rightarrow \quad \Delta h_i = \frac{Q}{b} \frac{L_i}{K_i} \quad (9.24)$$

siendo  $K^S$  la permeabilidad equivalente en serie buscada.

Como:

$$\Delta h = \sum_{i=1}^n \Delta h_i = \frac{Q}{b} \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{K_i} \quad \rightarrow \quad Q = b \frac{\Delta h}{\sum_{i=1}^n \frac{L_i}{K_i}} = b \left( \frac{L}{\sum_{i=1}^n \frac{L_i}{K_i}} \right) \frac{\Delta h}{L} \quad (9.25)$$

con lo que la permeabilidad equivalente buscada es:

$$K^S = \frac{L}{\sum_{i=1}^n \frac{L_i}{K_i}} \quad (9.26)$$

### 9.5.3 Analogía eléctrica

Este fenómeno, igual que otros muchos en la hidráulica, entre los que destacaremos la resolución de la Ecuación de Laplace, que se verá más adelante para el estudio de la red de flujo en el medio poroso, puede estudiarse mediante una analogía eléctrica de la ley de Ohm  $V = IR$  donde  $V$  es la diferencia de potencial,  $I$  la intensidad del campo eléctrico y  $R$  la resistencia.

Si hacemos las equivalencias hidráulicas de estas magnitudes como:

$$Q = I; \quad \Delta h = V \quad \frac{L}{KA} = R \quad (9.27)$$

y sabiendo que la resistencia equivalente a un grupo de resistencias dispuestas en paralelo es:

$$\frac{1}{R^P} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n R_i} \quad (9.28)$$

Sustituyendo por las equivalencias dadas se llega a la misma expresión de  $K^P$  que la deducida.

Cuando tratamos con resistencias en serie se tiene que la resistencia equivalente es:

$$R^S = \sum_{i=1}^n R_i \quad (9.29)$$

y también se llega a la  $K^S$  anteriormente deducida.

## 9.6 Ecuación de continuidad

Se considera el elemento paralelepédico infinitesimal de la figura 9.7, inmerso en un fluido en movimiento de velocidades  $\mathbf{v}$  ( $v_x, v_y, v_z$ ) según las componentes cartesianas ( $x, y, z$ ) respectivamente, y se estudia la variación de masa que se produce entre las caras  $-\frac{\Delta x}{2}$  y  $\frac{\Delta x}{2}$ . Al despreciar los términos de segundo orden, se obtiene:

- Masa que entra:  $\left[ \rho v_x - \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right] \Delta y \Delta z$
- Masa que sale:  $\left[ \rho v_x + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right] \Delta y \Delta z$

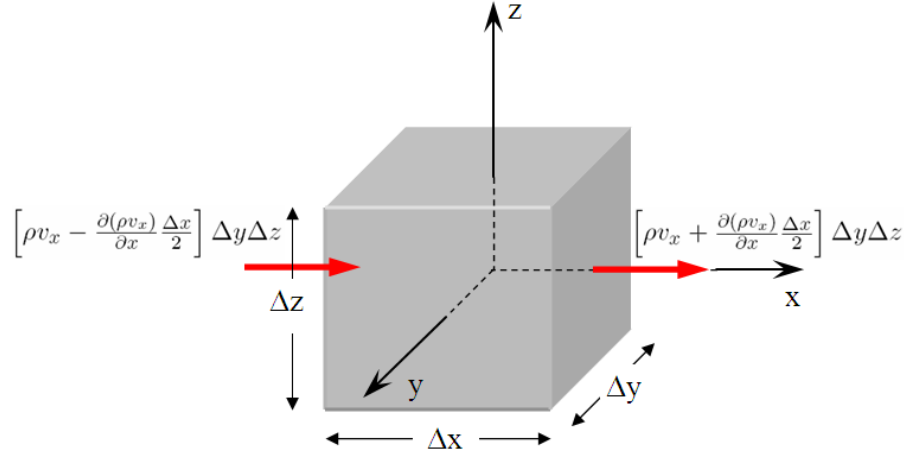


Figura 9.7: Flujo a través de un cubo infinitesimal

Por lo tanto la masa que entra menos la que sale en el elemento en un diferencial de tiempo se puede expresar como:

$$- \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} \Delta t \Delta x \Delta y \Delta z \quad (9.30)$$

Aplicando esta ecuación al equilibrio, entre las tres parejas de caras opuestas del paralelepípedo, se deduce:

$$- \left[ \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] \Delta x \Delta y \Delta z \quad (9.31)$$

Si se considera la variación de masa a lo largo del diferencial de tiempo  $t$  como:

$$[\rho(t) - \rho(t + \Delta t)] \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta t \Delta x \Delta y \Delta z \quad (9.32)$$

Si se tiene en cuenta el principio de la conservación de la masa, al igualar (9.31) y (9.32) se obtiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta t \Delta x \Delta y \Delta z = - \left[ \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \quad (9.33)$$

Con lo que resulta la ecuación:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[ \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] = 0 \quad (9.34)$$

Se puede deducir la siguiente forma alternativa a la expresión (9.34) al desarrollar los términos de velocidad:

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (9.35)$$

La variación de la masa  $\rho$  puede expresarse como una función de la variación de la presión a través del módulo de elasticidad volumétrico  $\varepsilon$

$$\Delta P = -\varepsilon \frac{dV}{V} = \varepsilon \frac{d\rho}{\rho} \quad \rightarrow \quad \varepsilon = \rho \frac{dP}{d\rho} \quad (9.36)$$

La ecuación (9.35) puede escribirse en términos de variación de la presión como:

$$\frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial P}{\partial t} + v_x \frac{\partial P}{\partial x} + v_y \frac{\partial P}{\partial y} + v_z \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (9.37)$$

Esta variación de presión produce dos fenómenos:

- El líquido se comprime disminuyendo el volumen en la cantidad:

$$\beta \frac{\partial P}{\partial t} dt V_h = \beta \frac{\partial P}{\partial t} dt n \Delta x \Delta y \Delta z \quad (9.38)$$

siendo  $\beta$  el módulo de elasticidad volumétrico del agua, y  $n$  la porosidad.

- La estructura del medio poroso se dilata aumentando el volumen total en la cantidad de:

$$\alpha \frac{\partial P}{\partial t} dt V_t = \alpha \frac{\partial P}{\partial t} dt \Delta x \Delta y \Delta z \quad (9.39)$$

siendo  $\alpha$  el módulo de elasticidad volumétrico del conjunto.

Esta variación de la masa debe coincidir con la expresada en la ecuación (9.33). Por tanto:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left[ \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] = -\rho (n\beta + \alpha) \frac{\partial P}{\partial t} \quad (9.40)$$



Al coeficiente  $S_s = -\rho g (n\beta + \alpha)$  se le llama almacenamiento específico y tiene dimensiones  $L^{-1}$ .

Si se adopta la hipótesis de que el agua puede considerarse un fluido incompresible ( $\rho = cte$ ), la ecuación (9.37) se convierte en:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (9.41)$$

que es la denominada **ecuación de continuidad** ( $div \mathbf{V} = 0$ ) de un fluido incompresible.

Esta ecuación expresa un campo solenoidal (por tanto con divergencia nula), donde los cambios en el flujo que se producen a través de una de las caras de la partícula fundamental mostrada en la figura 9.7 deben estar en equilibrio con lo que ocurre en el resto de la partícula.

## 9.7 La función de corriente

La función de corriente  $\psi$  esta basada en el principio de continuidad y representa las trayectorias que sigue un flujo fluido.

Cuando se tienen dos líneas de corriente adyacentes  $\psi$  y  $\psi + d\psi$  no existe flujo perpendicular a esas líneas, y  $d\psi$  representará el flujo entre ambas.

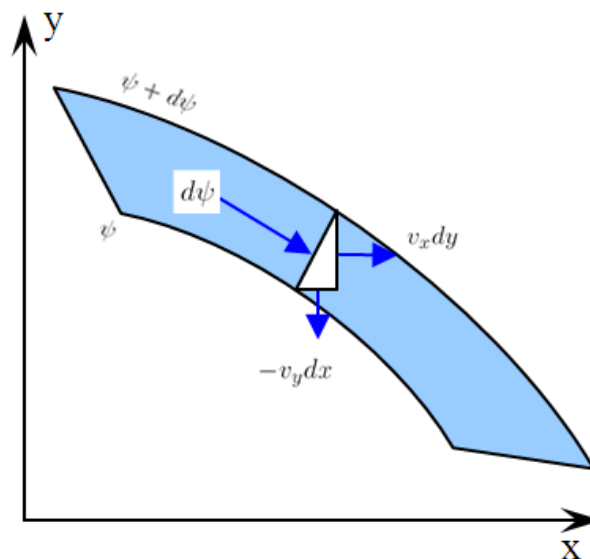


Figura 9.8: Equilibrio de caudales en un tubo de flujo

Si consideramos el elemento triangular entre ambas líneas de corriente mostrado en la figura 9.8 y aplicamos el equilibrio entre la entrada y las salidas, se obtiene:

$$d\psi = -v_y dx + v_x dy \quad (9.42)$$

La derivada total de la función de corriente, la podemos expresar mediante:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \quad (9.43)$$

Igualando las ecuaciones (9.42) y (9.43), se obtiene:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (9.44)$$

Esto quiere decir que las velocidades pueden conocerse a través de la función de corriente  $\psi$  expresada en función de las coordenadas  $x$  e  $y$ .

De manera inversa puede conocerse la función  $\psi$  integrando las velocidades si estas son conocidas.

Lo más importante a tener en cuenta es que la función  $\psi$  ha sido deducida teniendo en cuenta el principio de continuidad que debe satisfacerse. Por tanto:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0 \quad (9.45)$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \quad (9.46)$$

por lo que las derivadas cruzadas son iguales.

## 9.8 Movimiento irrotacional

La rotación de una partícula de fluido a lo largo de los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  se determina de acuerdo con la fórmula:

$$\text{rot } \bar{\omega} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad (9.47)$$

con lo que resulta:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (9.48)$$

Un campo de velocidades se denomina irrotacional si la rotación de cada partícula del fluido es nula, es decir  $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ . Conviene tener presente que la ausencia de rotaciones no implica que el fluido no sea viscoso, excepto en la región de  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ .

## 9.9 Potencial de velocidades

Se denomina potencial de velocidades  $\Phi$  a una función que satisface las igualdades:

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad \rightarrow \quad \mathbf{V} = \nabla \Phi \quad (9.49)$$

Si se introducen estos valores de la velocidad en la ecuación (9.48) resulta  $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ . Por consiguiente la existencia de una función potencial significa que el campo de velocidades es irrotacional, y se puede demostrar la proposición inversa.

Definamos un potencial de velocidades  $\Phi$  dado por:

$$d\Phi = -v_x dx - v_y dy \quad (9.50)$$

que existirá si el campo es irrotacional. En este caso, en que es un campo plano, basta con que  $\omega_z = 0$ , por tanto:

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \quad (9.51)$$

La derivada total del potencial es:

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy \quad (9.52)$$

Igualando las ecuaciones (9.50) y (9.52), se obtiene:

$$v_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad v_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (9.53)$$

El signo menos indica que el potencial va disminuyendo en la dirección de la velocidad.

Metiendo la condición de irrotacionalidad en el campo plano dada por el término  $\omega_z$  de la ecuación (9.48), y sustituyendo los valores de la velocidad en el campo potencial obtenidos en (9.53) se obtiene:

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)}{\partial y} - \frac{\partial \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (9.54)$$

con lo que se ha demostrado que las derivadas cruzadas son iguales.

La demostración de la existencia del campo potencial se ha realizado al introducir el campo irrotacional.

Cuando un fluido no es irrotacional, deben existir fuerzas de momento de par que hagan que no lo sea. Esas fuerzas se originan por las fuerzas cortantes debidas a la viscosidad. En fluidos ideales, donde no hay viscosidad, estas fuerzas no pueden existir y por tanto el fluido es irrotacional.

La expresión de esta ecuación en polares es:

$$v_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}; \quad v_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \quad (9.55)$$

## 9.10 Ecuación de Laplace

El fluido que cumple la función de Laplace es un fluido ideal, ya que

- Debe ser incompresible. Esto es necesario para que exista una función de corriente.
- Debe ser irrotacional. Esto es necesario para que exista una función potencial.

Si obligamos a que el potencial de velocidades (9.53) cumpla la ecuación de continuidad (9.41), se obtiene la **Ecuación de Laplace**:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (9.56)$$

## 9.11 Red de flujo

Al conjunto de la red formada por las líneas de corriente y equipotenciales que cumplen la Ecuación de Laplace se le denomina **red de flujo**.

A continuación vamos a demostrar que ambas funciones son perpendiculares en todos sus puntos.

Ya habíamos obtenido en las ecuaciones (9.42) y (9.50):

$$d\psi = -v_y dx + v_x dy \quad d\Phi = -v_x dx - v_y dy \quad (9.57)$$

Una línea de corriente cumple que  $d\psi = 0$  lo que implica que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} \quad (9.58)$$

Haciendo lo mismo con la línea equipotencial ( $d\Phi = 0$ ), se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{v_x}{v_y} \quad (9.59)$$

Esto implica que ambas líneas son ortogonales o perpendiculares en todos sus puntos.

## 9.12 Condiciones de contorno

La figura 9.9 muestra varias condiciones de contorno distintas en un medio poroso. Se supone la estructura apoyada sobre terreno impermeable.

En los tramos AB y DE la carga es un empuje hidrostático perpendicular a la pared y equivalente en cada punto al peso de la columna de agua que tiene por encima más la presión atmosférica. En cambio el potencial se puede interpretar como la energía de la partícula respecto del plano de referencia elegido. Así, cualquier partícula en la zona de agua a la izquierda de la presa tendrá un potencial dado por la ecuación de Bernoulli:

$$H = z + \frac{P}{\gamma} \quad (9.60)$$

valor que tienen todos los puntos del paramento AB de la presa. Lo mismo ocurre con el paramento DE, siendo en este caso un potencial menor.

La diferencia de potencial entre ambos es lo que hace que las partículas circulen a lo largo del macizo de la presa.

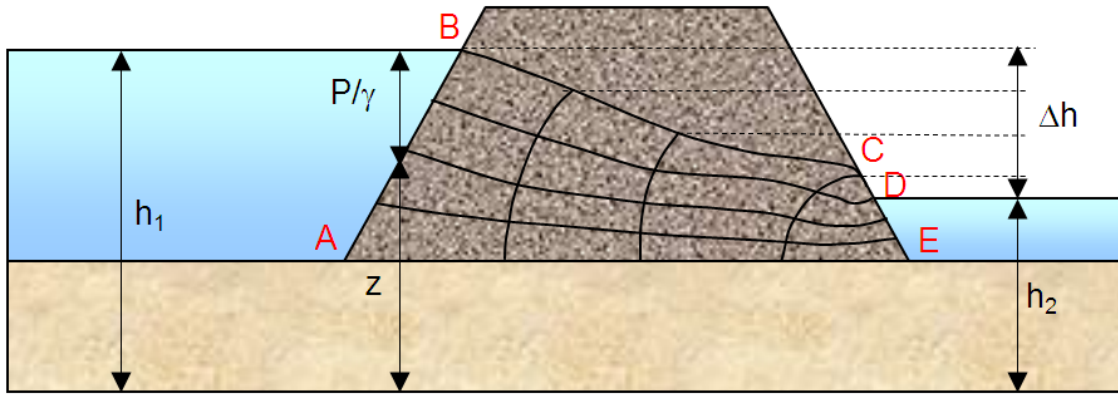


Figura 9.9: Condiciones de contorno

Si dividimos esta diferencia de potencial en partes iguales, y tenemos definida la línea de flujo con presión atmosférica se puede determinar la variación de potencial a lo largo de la misma con el corte de las líneas equipotenciales anteriores.

En CD la presión es la atmosférica, y el agua que aflora por este tramo desciende en forma de escurrimiento. Eso puede ser muy peligroso ya que puede extraer piezas de la estructura.

En AE como es impermeable, la línea de corriente sigue esta trayectoria, y por tanto, la velocidad normal a esta línea es nula:

$$v_n = -K \frac{\partial h}{\partial n} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial h}{\partial n} = 0 \quad (9.61)$$

El contorno BC es de superficie libre, es decir, presión igual a la atmosférica, por lo que se cumple la misma condición que en AE, no hay velocidad perpendicular al mismo.

La figura 9.10 muestra una red de flujo en un medio poroso, situado por encima de un terreno impermeable cuando el flujo se realiza por debajo de una estructura impermeable

Líneas de flujo constante son, el borde de la estructura y la separación de la capa impermeable con el medio poroso.

Líneas de potencial constante son AB y CD.

### 9.13 Resolución de la Ecuación de Laplace

Una vez establecidas las condiciones de contorno se trata de resolver la ecuación diferencial, para ello se dibujan las curvas de flujo y potencial a sentimiento, empezando por pocas líneas. La experiencia es fundamental y existen numerosas recomendaciones que al ser tenidas en cuenta simplifican este proceso.

Una vez dibujada la red de flujo, se comprueba que se cumpla la ecuación de Laplace entre los cuadros de la red, ajustándose el dibujo en caso contrario.

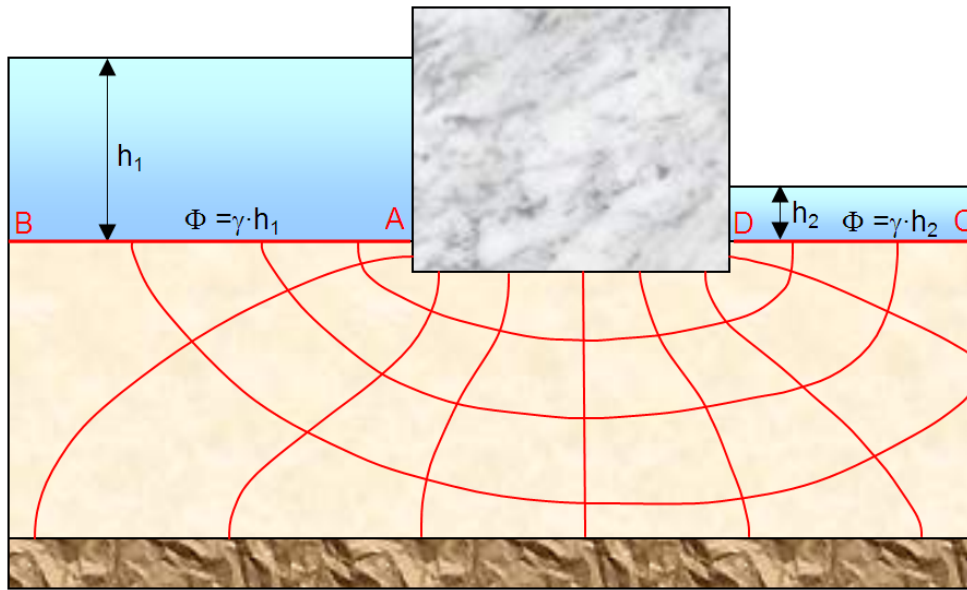


Figura 9.10: Red de flujo bajo una estructura impermeable

## 9.14 Hipótesis de Dupuit

La variación del flujo se define mediante:

$$d\psi = \frac{d\phi}{ds} \quad (9.62)$$

Cuando estamos en un acuífero con superficie libre casi horizontal, podemos utilizar la hipótesis de Dupuit para simplificar la resolución de la ecuación de Laplace. Esta consiste en:

$$d\psi = \frac{dh}{dx} \quad (9.63)$$

Lo que implica que estamos suponiendo que las líneas equipotenciales son perpendiculares al fondo impermeable, y que por lo tanto el flujo es perpendicular a estas. Si el fondo impermeable es horizontal el flujo, las equipotenciales son verticales, y el flujo es horizontal. Esta simplificación puede verse en la figura 9.11

Esta simplificación no será válida cuando la pendientes de la superficie libre es elevada, por ejemplo en niveles freáticos en laderas de montaña, pero no induce a mucho error si en laderas de montaña el estrato impermeable es relativamente paralelo a la cota piezométrica

### Ejemplo

Caudal extraído de una zanja

Calcular el caudal recogido por metro de longitud por una zanja abierta en una capa freática con coeficiente de permeabilidad  $K = 10^{-5} \text{ m/s}$  sabiendo que a 10 y 50 m de su paramento las cotas piezométricas sobre el estrato impermeable que coincide con el fondo de la zanja valen 4.0 y 7.0 m respectivamente. Determinar, además, la altura del nivel freático en el paramento de la zanja.

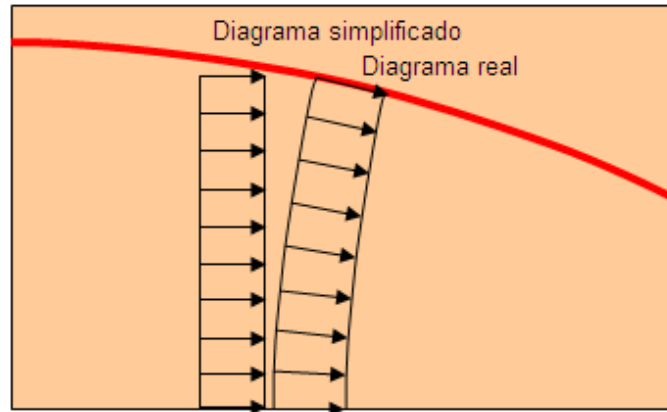


Figura 9.11: Hipótesis de Dupuit

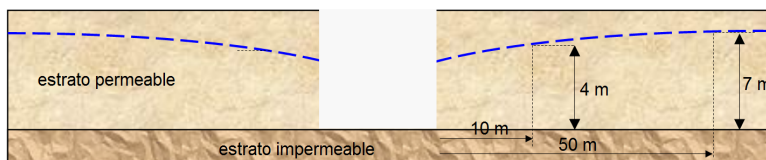


Figura 9.12: Zanja de extracción de agua en un acuífero

Asumiendo la hipótesis de Dupuit, el caudal por metro lineal de zanja es:

$$q = K \cdot h \frac{dh}{dx} = \text{cte} \quad (9.64)$$

Reescribiendo la ecuación anterior para su integración:

$$q \cdot dx = K \cdot h \cdot dh \quad \rightarrow \quad q \int_{l_a}^{l_b} dx = K \int_{h_a}^{h_b} h \cdot dh \quad \rightarrow \quad q \cdot x \Big|_{l_a}^{l_b} = \frac{1}{2} K \cdot h^2 \Big|_{h_a}^{h_b} \quad (9.65)$$

$$q(50 - 10) = \frac{1}{2} K (7^2 - 4^2) \quad \rightarrow \quad q = \frac{33 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 40} = 4.125 \cdot 10^{-6} \frac{m^3}{s \cdot m} \quad (9.66)$$

Por simetría de la zanja, el caudal total por metro de longitud de zanja es:

$$q_{total} = 2q = 8.25 \cdot 10^{-6} \frac{m^3}{s \cdot m} = 29.70 \frac{l}{h \cdot m} \quad (9.67)$$

El nivel freático puede determinarse al resolver la integral sin límites y aplicar las condiciones de contorno.

$$q \int dx = K \int h \cdot dh \quad \rightarrow \quad q \cdot x = K \frac{h^2}{2} + C_1 \quad \rightarrow \quad C_1 = q \cdot x - K \frac{h^2}{2} \quad (9.68)$$

Particularizando para el punto  $x = 10 \text{ m}$ ,  $h = 4 \text{ m}$ , se tiene:

$$C_1 = 10q - K \frac{4^2}{2} = 10q - 8K \quad (9.69)$$

Sustituyendo en (9.68):

$$q \cdot x = K \frac{h^2}{2} + 10q - 8K \quad (9.70)$$

Al aplicar  $x = 0 \text{ m}$  se obtiene la  $h$  en zanja:

$$K \frac{h^2}{2} + 10q - 8K = 0 \rightarrow h = \sqrt{16 - 20 \frac{q}{K}} = \sqrt{16 - 20 \cdot 0.4125} = 2.784 \text{ m} \quad (9.71)$$

## 9.15 Acuífero confinado

Un acuífero confinado es aquel en que el estrato permeable permanece encerrado entre dos estratos impermeables. Si se practica un pozo que atraviesa el estrato superior estamos creando un pozo artesiano en el que el agua puede ascender por encima de la cota de separación entre el estrato permeable y el impermeable debido a la presión del agua almacenada en el medio poroso (figura 9.13).

Si el espesor ( $e$ ) del acuífero permanece constante, el valor de  $K \cdot e$  es también una constante.

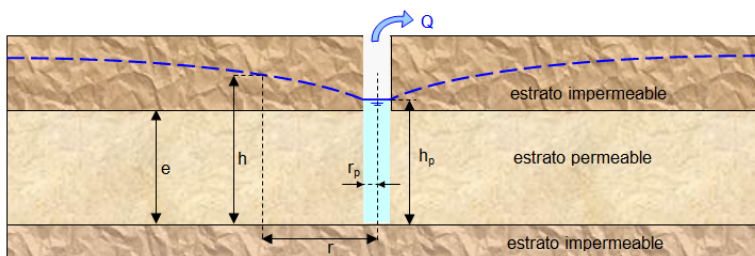


Figura 9.13: Acuífero confinado

En este caso, y aplicando al hipótesis de Dupuit, la red de flujo la podemos expresar como un potencial de la altura piezométrica mediante:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (9.72)$$

que en coordenadas polares resulta:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} = 0 \quad (9.73)$$

En el caso particular de un pozo hay simetría circular, por lo que el segundo término es nulo, quedando:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial h}{\partial r} \right) = 0 \quad (9.74)$$



por lo que el siguiente término es constante:

$$r \frac{dh}{dr} = C \quad \rightarrow \quad \frac{dh}{dr} = \frac{C}{r} \quad (9.75)$$

La constante  $C$  puede obtenerse al considerar el caudal extraído del pozo cuando se ha conseguido el régimen permanente, momento en que el caudal que se filtra a través de cualquier sección cilíndrica a una distancia  $r$  del centro del pozo coincide con el extraído.

$$Q = S \cdot v = 2\pi r e K \frac{dh}{dr} \quad \rightarrow \quad \frac{dh}{dr} = \frac{Q}{2\pi r e K} = \frac{C}{r} \quad \rightarrow \quad C = \frac{Q}{2\pi e K} \quad (9.76)$$

siendo:

$$\begin{aligned} S & \text{ Sección del cilindro a la distancia } r \text{ atravesado por el flujo} & (m^2) \\ e & \text{ Altura constante del acuífero confinado} & (m) \end{aligned}$$

Integrando la ecuación (9.75) se tiene:

$$dh = \frac{C}{r} dr \quad \rightarrow \quad h = \frac{Q}{2\pi e K} \ln(r) + C' \quad (9.77)$$

Para obtener la constante de integración se establecen las condiciones en el pozo, donde para ( $r = r_p$ ) la altura piezométrica en régimen permanente es conocida ( $h = h_p$ ).

$$C' = h_p - \frac{Q}{2\pi e K} \ln(r_p) \quad \rightarrow \quad h - h_p = \frac{Q}{2\pi e K} \ln\left(\frac{r}{r_p}\right) \quad (9.78)$$

$$\begin{aligned} h_p & \text{ Altura piezométrica en el pozo en régimen permanente} & (m) \\ r_p & \text{ Radio del pozo} & (m) \end{aligned}$$

Metiendo este valor en (9.77) se tiene:

$$h - h_p = \frac{Q}{2\pi e K} \ln\left(\frac{r}{r_p}\right) \quad (9.79)$$

Esta ecuación permite dibujar la forma de la superficie libre conocida la permeabilidad del acuífero, la altura del estrato impermeable, y el caudal extraído para una determinada altura piezométrica medida de un pozo de radio conocido cuando el régimen es permanente.

Este caso se puede aplicar únicamente cuando la altura piezométrica medida en el pozo ( $h_p$ ) esta por encima de la altura de confinamiento del acuífero, o este dejará de ser confinado.

### Ejemplo

Cálculo de la permeabilidad en un acuífero confinado.

Las cotas piezométricas medidas en dos puntos separados 20 y 200 m del centro de un pozo artesiano son respectivamente 15.0 y 23.0 m contados desde la cota superior del estrato permeable.

Sabiendo que el radio del pozo es de 1.0 m, el espesor del estrato 20.0 m y el caudal extraído 3.5 l/s. Se pide calcular el coeficiente de permeabilidad de la capa.

Partiendo de la ecuación (9.79) y aplicando las condiciones de contorno facilitadas en el enunciado, se tiene:

$$r = 20 \quad h = 20 + 15 \quad 20 + 15 - h_p = \frac{3.5 \cdot 10^{-3}}{2\pi 20 K} \ln\left(\frac{20}{1}\right) \quad (9.80)$$

$$r = 200 \quad h = 20 + 23 \quad 20 + 23 - h_p = \frac{3.5 \cdot 10^{-3}}{2\pi 20 K} \ln\left(\frac{200}{1}\right) \quad (9.81)$$

Restando la ecuación (9.81) de la ecuación (9.80), se llega a:

$$23 - 15 = \frac{0.027852 \cdot 10^{-3}}{K} \ln\left(\frac{200}{20}\right) \rightarrow K = \frac{27.852 \cdot 10^{-6} \ln(10)}{8} = 8.016 \cdot 10^{-6} \text{ m/s} \quad (9.82)$$

La altura piezométrica alcanzada en el pozo será:

$$h_p = 35 - \frac{3.5 \cdot 10^{-3}}{2\pi 20 \cdot 8.016 \cdot 10^{-6}} \ln(20) = 24.59 \text{ m} \quad (9.83)$$

## 9.16 Acuífero con superficie libre

La diferencia con el acuífero confinado es que la sección atravesada por el flujo varía en función de la distancia al pozo, siendo  $h$  la altura de la misma. En este caso únicamente la permeabilidad ( $K$ ) es una constante. La figura 9.14 muestra una sección radial de este tipo de acuíferos

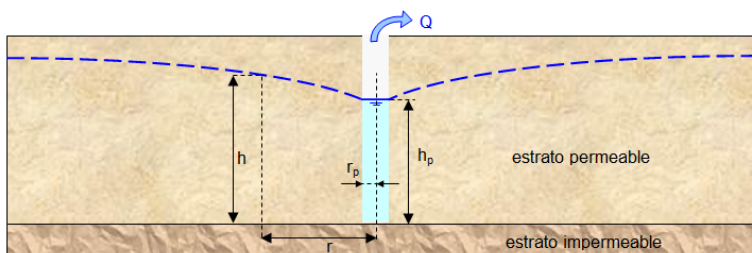


Figura 9.14: Acuífero libre

Por tanto, y aplicando al hipótesis de Dupuit, la red de flujo la podemos expresar como un potencial de la altura piezométrica al cuadrado mediante:

$$\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2} = 0 \quad (9.84)$$

que en coordenadas polares resulta:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial h^2}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 h^2}{\partial \theta^2} = 0 \quad (9.85)$$

La simetría circular en este caso implica:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial h^2}{\partial r} \right) = 0 \quad (9.86)$$

por lo que el siguiente término es constante:

$$r \frac{dh^2}{dr} = C \quad (9.87)$$

Si se tiene en cuenta que  $\frac{dh^2}{dh} = 2h$ , podemos escribir que  $dh^2 = 2h dh$ . Sustituyendo en (9.87) se llega a:

$$r \frac{2h dh}{dr} = C \quad \rightarrow \quad \frac{dh}{dr} = \frac{C}{2hr} \quad (9.88)$$

La constante  $C$  puede obtenerse cuando se considera el caudal extraído del pozo cuando se ha conseguido el régimen permanente, momento en que el caudal que se filtra por las paredes del pozo coincide con el extraído.

$$Q = 2\pi r h K \frac{dh}{dr} \quad \rightarrow \quad \frac{dh}{dr} = \frac{Q}{2\pi r h K} \quad (9.89)$$

Igualando las ecuaciones (9.88) y (9.89) se determina el valor de la constante  $C$ .

$$C = \frac{Q}{\pi K} \quad (9.90)$$

Integrando la ecuación (9.88) y sustituyendo el valor de  $C$ , se tiene:

$$2h dh = \frac{Q}{\pi K r} dr \quad \rightarrow \quad h^2 = \frac{Q}{\pi K} \ln(r) + C' \quad (9.91)$$

Para obtener la constante de integración se establecen las condiciones en el radio del pozo ( $r_p$ ) donde la altura es conocida ( $h_p$ ).

$$C' = h_p^2 - \frac{Q}{\pi K} \ln(r_p) \quad \rightarrow \quad h^2 - h_p^2 = \frac{Q}{\pi K} \ln\left(\frac{r}{r_p}\right) \quad (9.92)$$

resultando la ecuación:

$$h^2 - h_p^2 = \frac{Q}{\pi K} \ln\left(\frac{r}{r_p}\right) \quad (9.93)$$

### Ejemplo

Cálculo de la permeabilidad en un acuífero libre.

Determinar la permeabilidad en el entorno de un pozo de 1 m de radio sabiendo que al bombear de forma permanente un caudal de 100 l/s la cota de agua en el pozo es la 102 m, estando el nivel freático a una distancia de 20 m del centro del pozo a la cota 108.2 m. El fondo del pozo donde se supone se alcanza el estrato impermeable esta situado a la cota 92.5 m.

Partiendo de la ecuación (9.93) y aplicando las condiciones de contorno facilitadas en el enunciado, se tiene:

$$r = 1 \quad h = h_p = 102.0 - 92.5 = 9.50 \quad 9.50^2 - 9.50^2 = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{\pi K} \ln \left( \frac{1}{1} \right) \quad (9.94)$$

$$r = 20 \quad h = 108.2 - 92.5 = 15.70 \quad 15.70^2 - 9.50^2 = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{\pi K} \ln \left( \frac{20}{1} \right) \quad (9.95)$$

Restando la ecuación (9.95) de la ecuación (9.94), se llega a:

$$K = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{\pi (15.7^2 - 9.5^2)} \ln(20) = 6.10 \cdot 10^{-4} \text{ m/s} \quad (9.96)$$